Libro del Maestro

Primero al Séptimo Niveles de Abstracción

Contenido

Capítulo 1

Las Cuatro Dimensiones de los Números

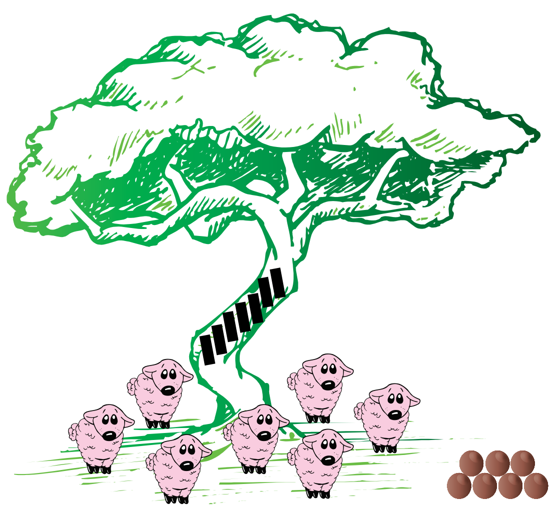
Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Los Números Tienen Vida Propia

Breve Historia de los Números Naturales

Primer concepto de número

Comparar los objetos que se intercambian con símbolos o con piedras, es el antecedente de contar y sumar.
Para saber si la cantidad de borregos que en la mañana salen a pastar, es la misma que regresa en la tarde, nuestros antepasados hacían marcas en un pedazo de madera, o acumulaban piedras. Cada marca o cada piedra correspondía a un animal. Al regresar los borregos los comparan uno a uno con las marcas o las piedras.



Por experimentos que se han realizado con animales y con bebés, sabemos que es posible reconocer hasta cuatro objetos sin contar. El animal, el bebé e incluso los adultos, al ver tres objetos sabe que falta uno, ya que reconoce que eran cuatro, pero si el número de objetos es mayor a cuatro, ya no reconoce cuántos objetos faltan o sobran.

De esta primitiva manera de comparar objetos de conjuntos, surge el número que nos permite identificar un conjunto de objetos, sin necesidad de hacer una comparación uno a uno de dos conjuntos.

I	II	III	IIII	~~IIII~~
Uno	**Dos**	**Tres**	**Cuatro**	**Cinco**

Al número de rayas o piedras le asignaron un nombre. No sabemos en que tiempo sucedió, pero este nombre asociado al conjunto paso a ser un adjetivo calificativo. Ahora era ya posible decir: *ocho* perros.

La escuela Pitagórica

En el siglo VI bc, la escuela Pitagórica, descubrió que los números naturales tienen vida por ellos mismos. Los números se usan para contar, pero lo importante es descubrir la naturaleza del número.

Pitágoras da al número una categoría similar a los dioses. El número es el primer principio, no es posible definirlo y en él están contenidos todos los números.

El número es sagrado, ya que en él está contenido toda la sabiduría humana. El número es tan incomprensible como los dioses.

La hermandad formada por Pitágoras, era una colección de familias. Las mujeres eran también estudiosas de los números.

Los números Pitagóricos son los números naturales.

Los números son el símbolo secreto de la realidad en la que vivimos.

Algunos números Pitagórica y su significado

1 Lo llamaron monad que significa *unidad*. Es el *generador* de todos los números, por lo tanto el *más importante*. Representa la *razón*.

2 Lo llamaron dyad y representa la diversidad de opinión. Es el primer número *femenino*.

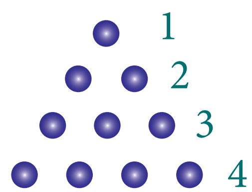
3 Lo llamaron triad y representa la *armonía*. Es la suma de 1, que es la unidad y 2 que representa la diversidad, por lo cual, constituye la armonía. Es el primer número *masculino*. Si tomamos a la mujer, número 2 y le añadimos razón, número 1, obtenemos al hombre.

4 Lo llamaron *cuadro*, ya que cuatro puntos son los vértices de un cuadrado. Representa la *justicia*.

5 Representa el *matrimonio*, ya que la mujer, número 2 y el hombre número 3, forman el matrimonio.

6 Representa la *creación*. La mujer, número 2, el hombre, número 3 y el 1 que es el fruto del hombre y la mujer, el niño, representan la *creación*.

10 Lo llamaron *tetractys*. Es el número más importante y más sagrado. Representa los cuatros elementos del universo: fuego, tierra, agua y aire. Geométricamente lo representaban con diez puntos, acomodados como un triángulo equilátero, donde todos los lados son iguales.



1 + 2 + 3 + 4 = 10

Los Pitagóricos estudiaron la *Relación de Oro*. Involucra dos números tales que: la razón de la suma de los números al más grande es igual a la razón del más grande al más pequeño.

$$a > b$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} \qquad \text{Si } b = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{a+1}{a} = \frac{a}{1}$$

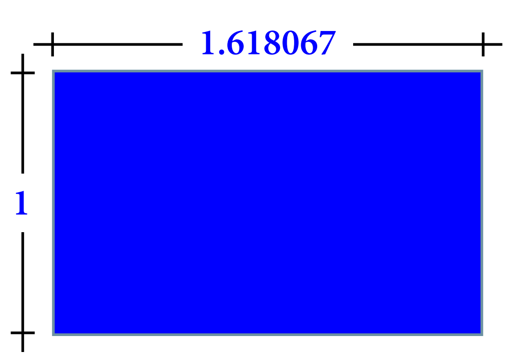
$$a+1 = a^2 \quad \rightarrow \quad a^2 - a - 1 = 0$$

$$a = \frac{-(-1)+\sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = 1.6180679778$$

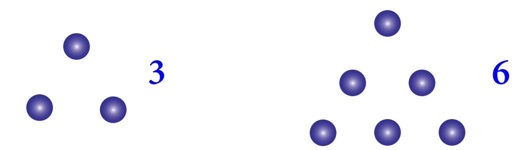
$$\frac{a+b}{a} = \frac{1.6180679778+1}{1.6180679778} = 1.6180679778$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1.6180679778}{1} = 1.6180679778$$

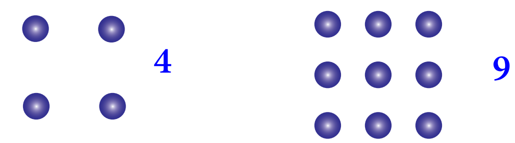


Números y figuras geométricas

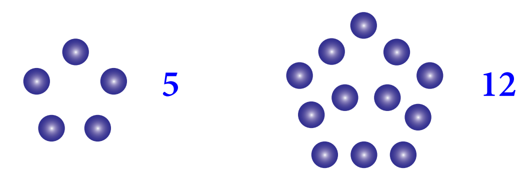
Números triangulares.
Con los puntos que el número representa, formamos triángulos equiláteros.



Números cuadrados perfectos.
Con los puntos que el número representa, formamos cuadrados.



Números pentagonales.



Números perfectos

La suma de todos los números que lo dividen en forma exacta, es el número.

6 Los números que dividen a 6 en forma exacta son:

1, 2, 3.

La suma de los números que dividen en forma exacta a 6 es:

1 + 2 + 3 = 6.

28 Los números que dividen a 28 en forma exacta son:

1, 2, 4, 7, 14.

La suma de los números que dividen en forma exacta a 6 es:

1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28.

Números amigables

La suma de todos los números que dividen es el otro número.

284 Los números que dividen a 284 son: 1, 2, 4, 71, 142.

1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.

220 Los números que dividen a 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110.

1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.

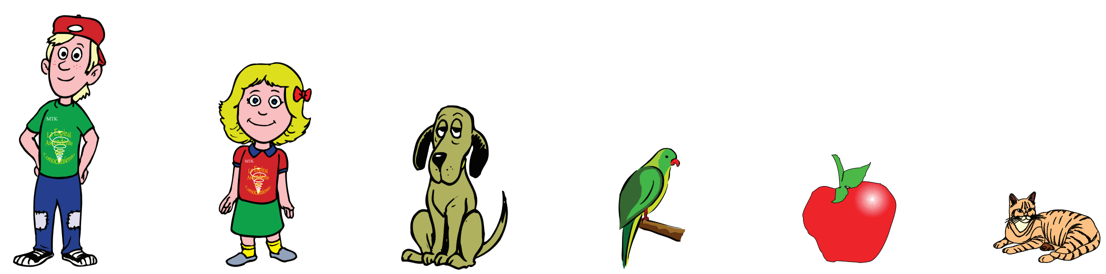
Las Cuatro Dimensiones de los Números

Primer Nivel de Abstracción

Los objetos de la naturaleza

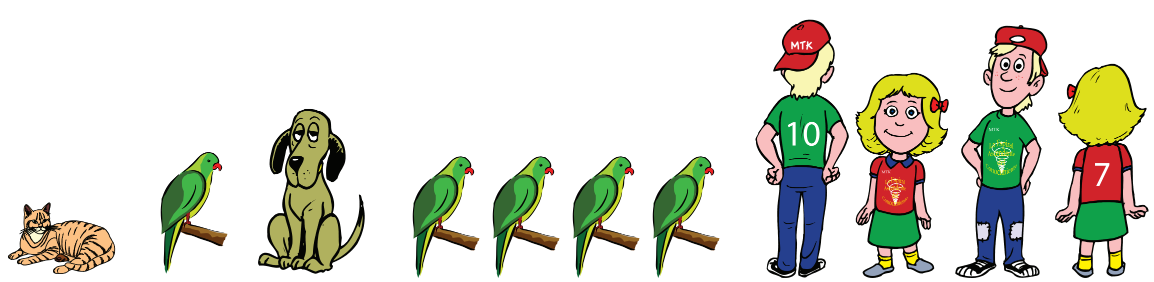
En el espacio que vivimos encontramos personas y diferentes objetos. Cosas creadas por la naturaleza, como son: el sol, los animales, plantas, frutas, etcétera. Objetos creados por nosotros, como por ejemplo: las canicas, los balones, los carros, los libros, etcétera.

Todas las personas, animales y objetos de la naturaleza tienen un nombre.



Niño. **Niña.** **Perro.** **Perico.** **Manzana.** **Gato.**

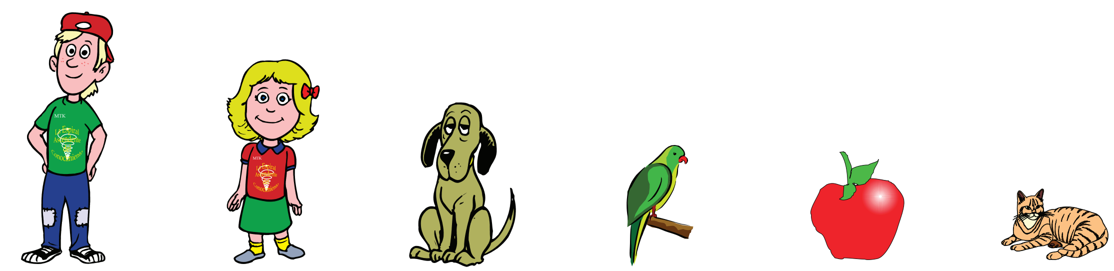
Para clasificar los objetos, los agrupamos en conjuntos.



Conjunto de animales. **Conjunto de pericos.** **Conjunto de niños.**

Primera dimensión de los números

Los números representan personas, animales y objetos



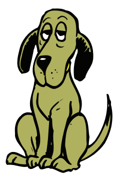
Niño. **Niña.** **Perro.** **Perico.** **Manzana.** **Gato.**

Para entender mejor el mundo en el que vivimos a cada persona, animal y objeto le asignamos el número uno. El número que la escuela Pitagórica consideraba el más importante de todos los números, ya que es el generador de los demás

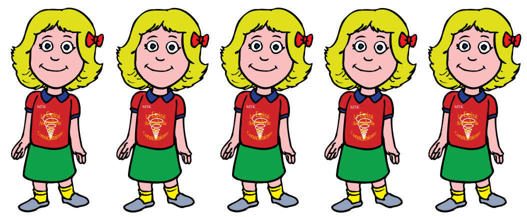
Un niño. **Una niña.** **Un perro.** **Un perico.** **Una manzana.** **Un gato.**

Segunda dimensión de los números

Los números tienen un nombre

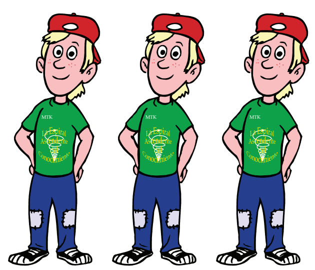


Un perro.

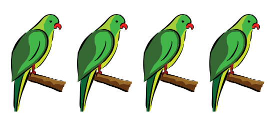


Cinco niñas.

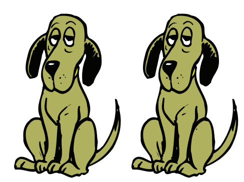
Uno	Seis
Dos	Siete
Tres	Ocho
Cuatro	Nueve
Cinco	



Tres niños.



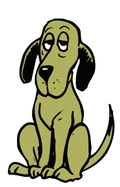
Cuatro pericos.



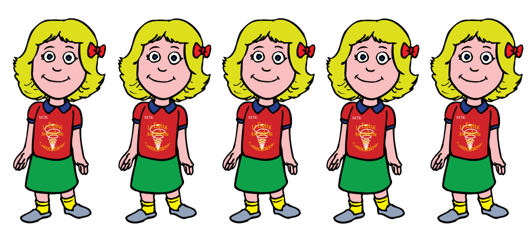
Dos perros.

Tercera dimensión de los números

Los números se representan con un símbolo

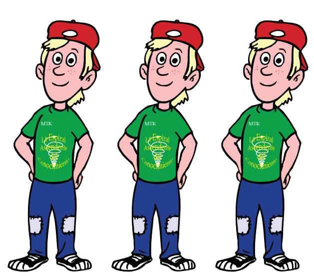


1 perro.

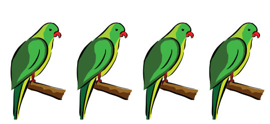


5 niñas.

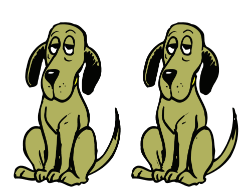
1 Uno	6 Seis
2 Dos	7 Siete
3 Tres	8 Ocho
4 Cuatro	9 Nueve
5 Cinco	



3 niños.



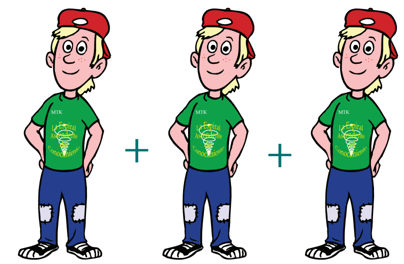
4 pericos.



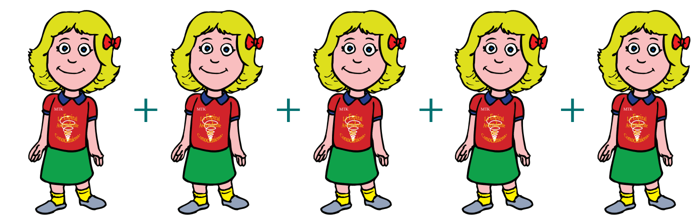
2 perros.

Cuarta dimensión de los números

Los números contienen el concepto de la suma



1 + 1 + 1 = 3 niños.



1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 niñas.

El número cero

El número cero es un número muy especial

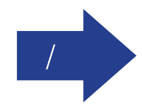
El cero es el número que utilizamos para indicar que no hay ninguna persona, animal u objeto.

Los números también representan dimensiones

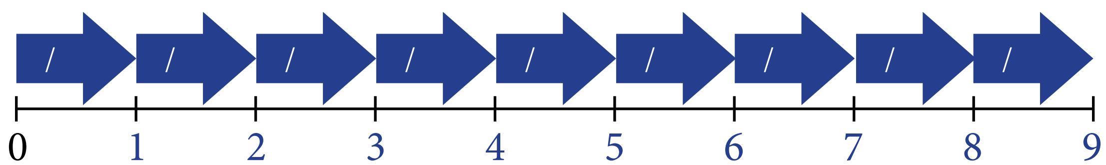
La recta de los números

Utilizamos una unidad convencional para medir las distancias. Por ejemplo: utilizar una cuarta, un pie, una vara, o alguna de las unidades de medición: el metro, el centímetro, etc.

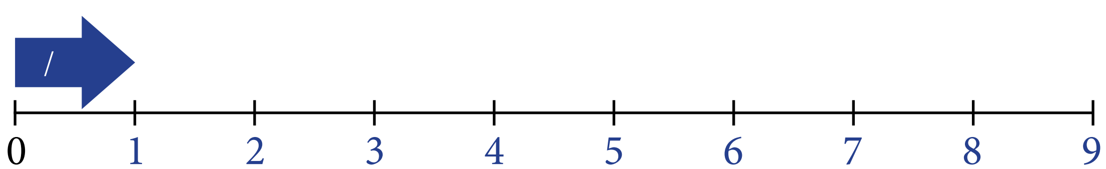
Podemos también utilizar una flecha, a la que llamamos vector, para medir la distancia.

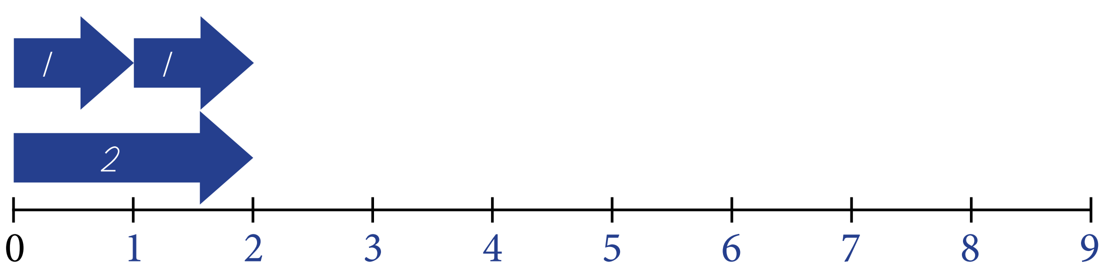


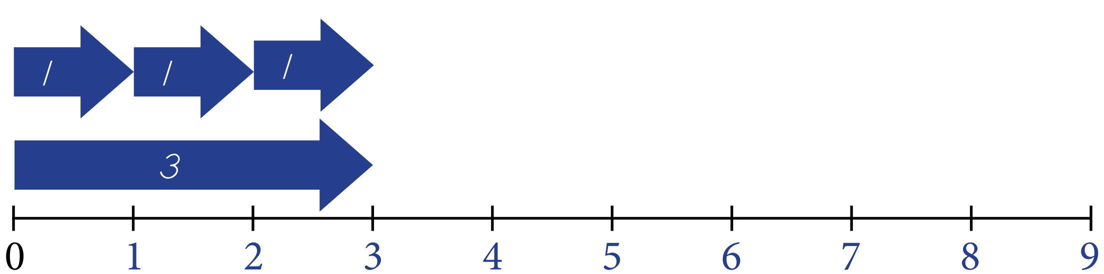
Si colocamos un vector delante del otro para sumarlos, construimos la recta de los números.

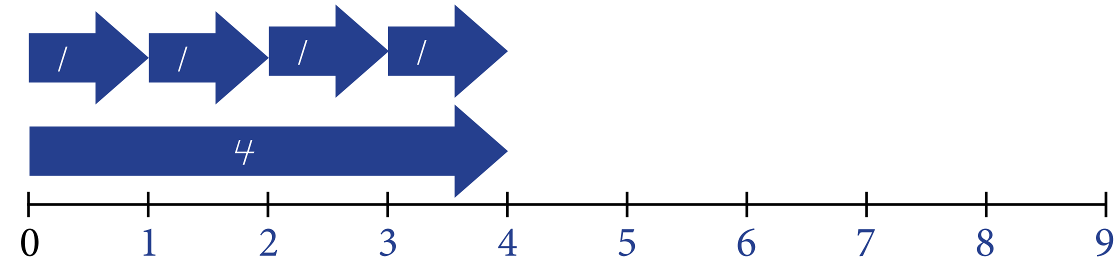


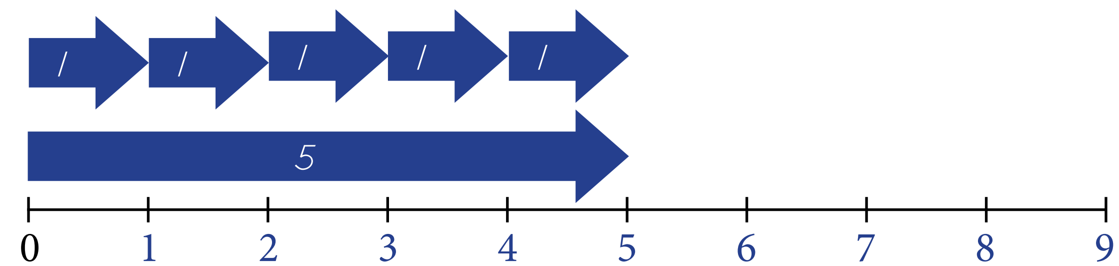
Sumamos los vectores para crear las distancias del 1 al 9.

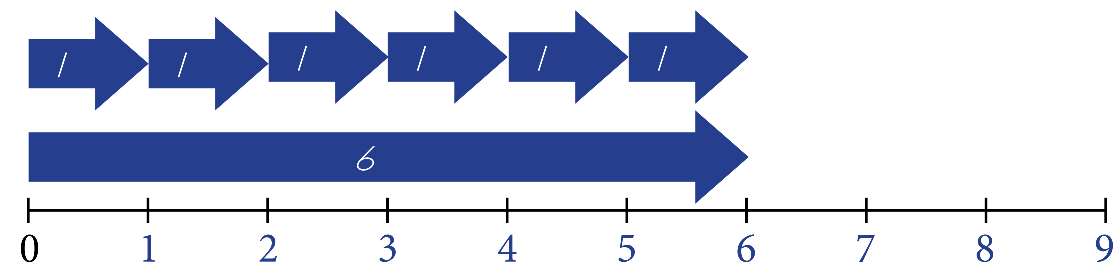


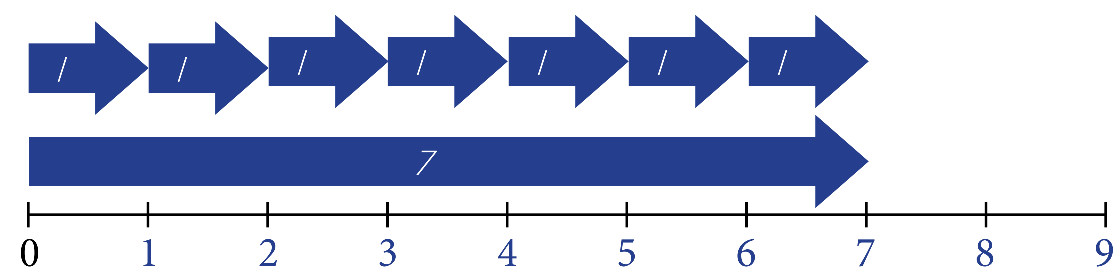


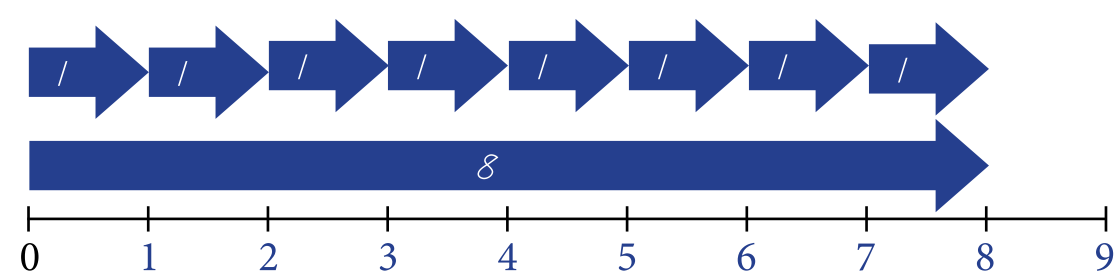


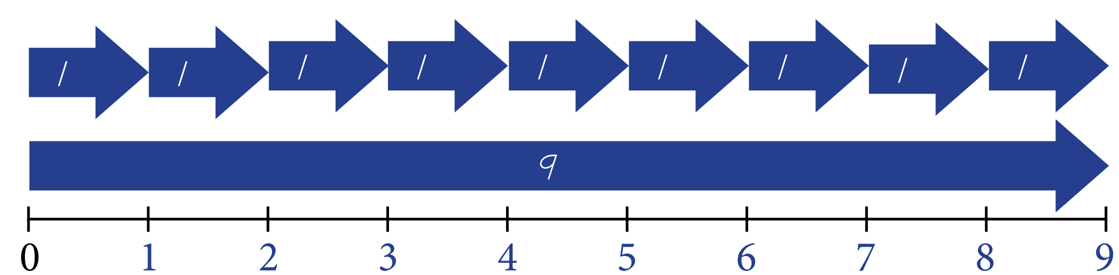












Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

Primer Nivel de Abstracción

Los números del 1 al 9 y el 0

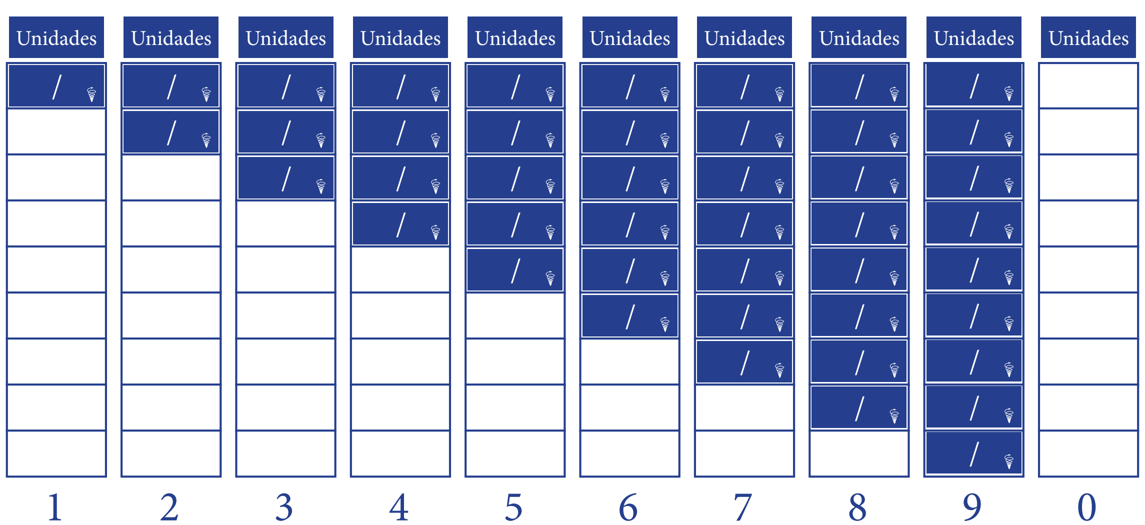
Con el número 1 creamos los otros 8 dígitos

1	$1+1+1+1+1+1=6$
$1+1=2$	$1+1+1+1+1+1+1=7$
$1+1+1=3$	$1+1+1+1+1+1+1+1=8$
$1+1+1+1=4$	$1+1+1+1+1+1+1+1+1=9$
$1+1+1+1+1=5$	

Las columnas numéricas

Para poder crear los números cuando solamente contamos con nueve dígitos y el cero utilizamos las columnas numéricas.

Estos nueve dígitos los acomodamos en una columna, la cual llamamos Columna de las Unidades.

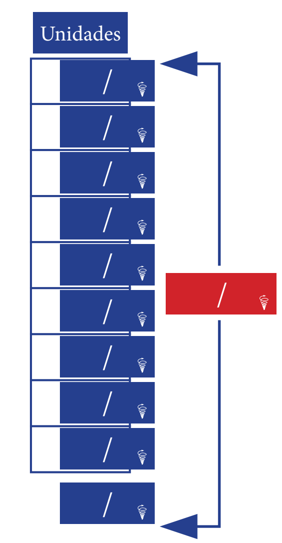


Los números del 10 al 99

La columna de las decenas

Solamente tenemos nueve dígitos, por lo tanto, las columnas solamente tienen nueve espacios donde podemos colocarlos.

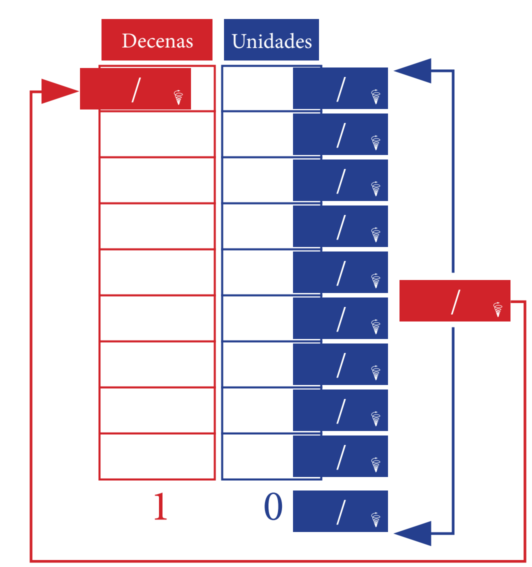
Si colocamos otro 1 en la Columna de las Unidades, creamos una nueva unidad la cual llamamos Decena, porque está formada de 10 unidades o unos.



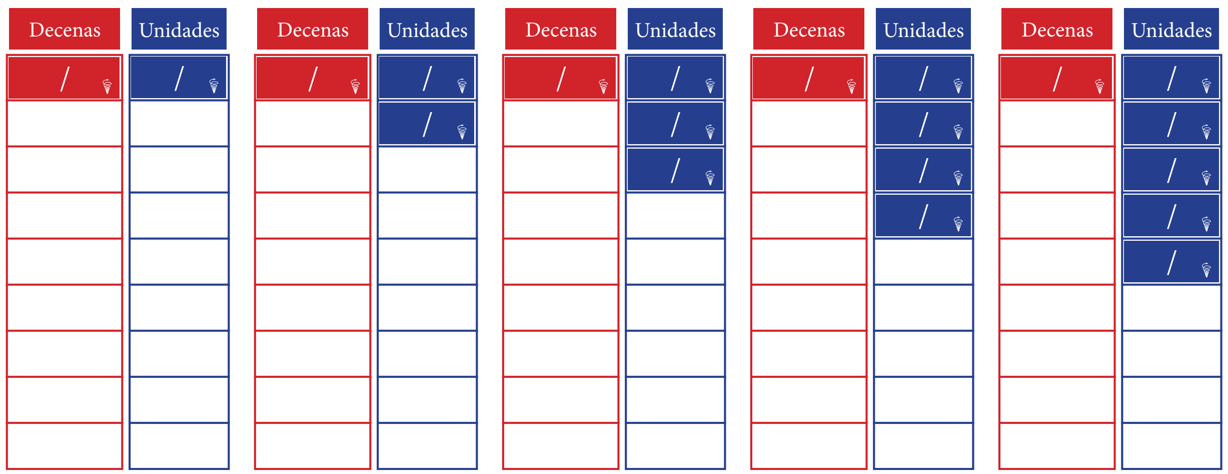
Esa nueva unidad que hemos creado, 1 Decena, la colocamos en la columna de la izquierda, la cual llamamos la Columna de las Decenas.

La Columna de las Unidades, ahora está vacía. Para indicar que no tiene ninguna unidad o uno, colocamos el número 0.

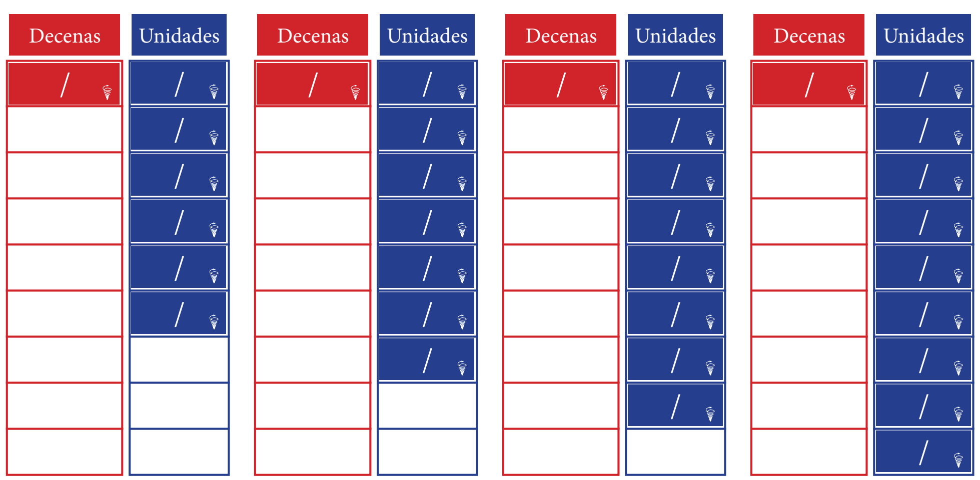
Creamos el número 10.
El nombre del número es diez.



Ahora podemos crear 9 números más: los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19.



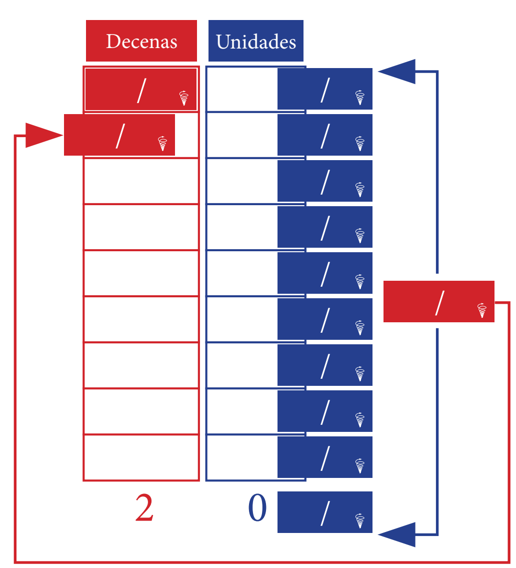
1 1 Once | 1 2 Doce | 1 3 Trece | 1 4 Catorce | 1 5 Quince



1 6 Dieciséis | 1 7 Diecisiete | 1 8 Dieciocho | 1 9 Diecinueve

Ahora colocamos una ficha más en la Columna de las Unidades, creamos una decena y la movemos a la columna de la izquierda, la Columna de las Decenas.

Hemos creado el número 20.
El nombre del número es veinte.

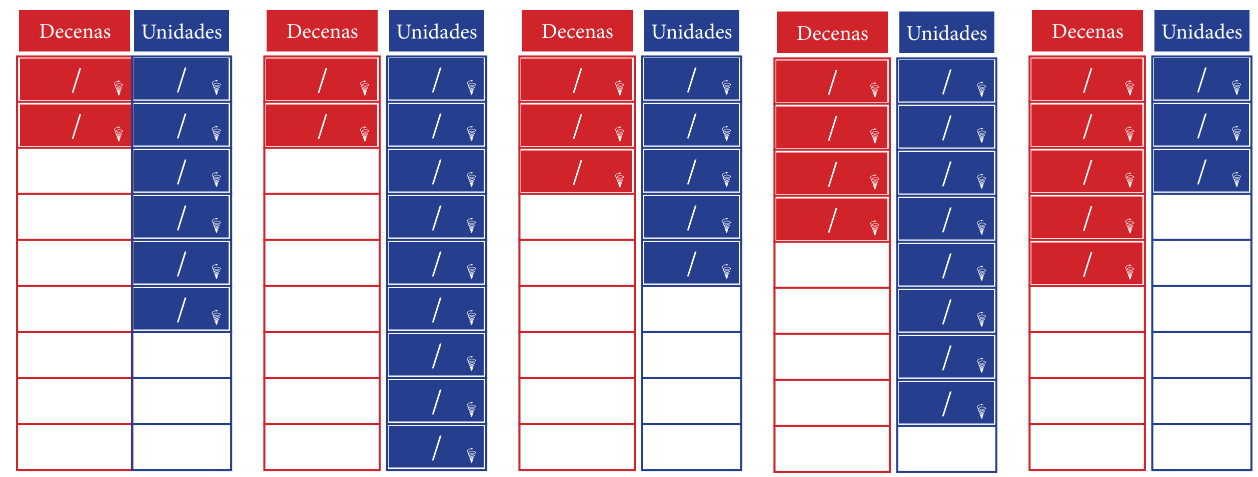


En la dinámica básica del sistema de numeración decimal, todas las columnas se comportan de la misma manera.

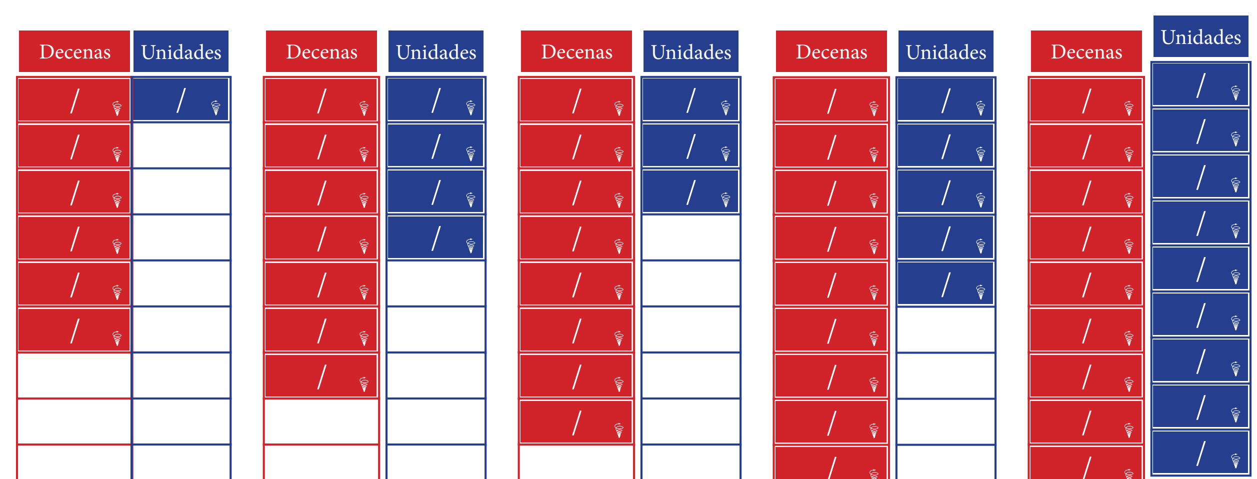
Colocando unos en la Columna de las Unidades, creamos los números del 21 al 29. Colocamos otro uno en la Columna de las Unidades, creamos una decena y la movemos a la columna de la izquierda, la Columna de las Decenas y creamos el número 30.

Los nombres de los números son muy fáciles ya que el apellido depende de la columna en la cual nos encontramos. En el caso de la Columna de las Decenas los apellidos son: veinte, treinta, cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta, noventa.

Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, podemos crear los números hasta el 99.



2 6 Veintiséis | 2 9 Veintinueve | 3 5 Treinta y cinco | 4 8 Cuarenta y ocho | 5 3 Cincuenta y tres



6 1 Sesenta y uno | 7 4 Setenta y cuatro | 8 3 Ochenta y tres | 9 5 Noventa y cinco | 9 9 Noventa y nueve

La escritura de los números

Los nombres de los números

El sistema de numeración es decimal, es decir, está construido con diez símbolos. Cada uno de estos símbolos corresponde a un número de objetos o dimensiones.

A estos diez símbolos o números les llamamos dígitos, porque los hemos construido contando con los dedos de las manos.

Los nombres de los dígitos, excepto el cero, los utilizamos para construir los nombres de todos los números.

Columna de las unidades

Unidad de la columna de las unidades.

Nombres de las unidades.

1	uno
2	dos
3	tres
4	cuatro
5	cinco
6	seis
7	siete
8	ocho
9	nueve
0	cero

Columna de las decenas

Unidad de la columna de las decenas.

Nombres de las decenas.

10	diez
20	veinte
30	treinta
40	cuarenta
50	cincuenta
60	sesenta
70	setenta
80	ochenta
90	noventa

Columna de las centenas

Unidad de la columna de las centenas.

Nombres de las centenas.

100	cien
200	doscientos
300	trescientos
400	cuatrocientos
500	quinientos
600	seiscientos
700	setecientos
800	ochocientos
900	novecientos

Una vez que conocemos los nombres de las decenas y las centenas, los combinamos con los nombres de las unidades y construimos los nombres de los números.

En español hay *cinco* números cuyos nombres son una *excepción*. Estos números son:

11 → once
12 → doce
13 → trece
14 → catorce
15 → quince

El resto los nombres de números en la columna de las decenas, se construyen combinando el nombre de las decenas y el nombre de las unidades.

16 → dieciséis	21 → veintiuno	31 → treinta y uno
17 → diecisiete	22 → veintidós	32 → treinta y dos
18 → dieciocho	23 → veintitrés	33 → treinta y tres
19 → diecinueve	24 → veinticuatro	34 → treinta y cuatro
	25 → veinticinco	35 → treinta y cinco
	26 → veintiséis	36 → treinta y seis
	27 → veintisiete	37 → treinta y siete
	28 → veintiocho	38 → treinta y ocho
	29 → veintinueve	39 → treinta y nueve

Los nombres de los números creados con cuarenta, cincuenta, sesenta, setenta, ochenta y noventa, siguen exactamente el mismo patrón que treinta.

Los nombres de números en la columna de las centenas, se construyen combinando el nombre de las centenas, las decenas y las unidades.

101 → ciento uno	211 → doscientos once
102 → ciento dos	211 → doscientos doce
103 → ciento tres	211 → doscientos trece
104 → ciento cuatro	211 → doscientos catorce
105 → ciento cinco	211 → doscientos quince
106 → ciento seis	211 → doscientos dieciséis
107 → ciento siete	211 → doscientos diecisiete
108 → ciento ocho	211 → doscientos dieciocho
109 → ciento nueve	211 → doscientos diecinueve

351 → trescientos cincuenta y uno
352 → trescientos cincuenta y dos
353 → trescientos cincuenta y tres
354 → trescientos cincuenta y cuatro
355 → trescientos cincuenta y cinco
356 → trescientos cincuenta y seis
357 → trescientos cincuenta y siete
358 → trescientos cincuenta y ocho
359 → trescientos cincuenta y nueve

Cuando pasamos a las columnas de los *millares* o *miles*, añadimos *mil* o *miles*, a los nombres de los números del 1 al 999.

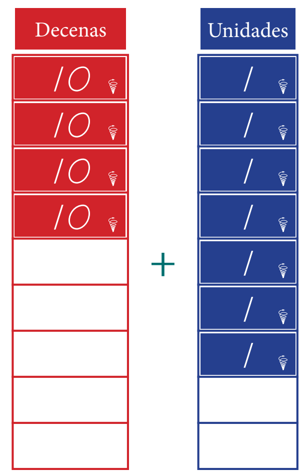
351,946 → trescientos cincuenta y un mil novecientos cuarenta y seis.
674,682 → seiscientos setenta y cuatro mil seiscientos ochenta y dos.
836,293 → ochocientos treinta y seis mil doscientos noventa y tres.
965,379 → novecientos sesenta y cinco mil trescientos setenta y nueve.

Notación desarrollada

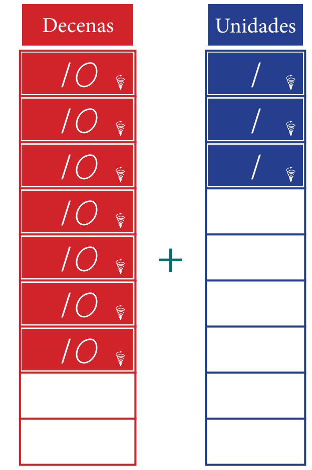
Todos los números los podemos escribir en notación compacta o en notación desarrollada.

En la notación desarrollada tomamos en cuenta no solamente la posición de la columna, es decir si se trata de la Columna de las Unidades o de la Columna de las Decenas que se encuentra a la izquierda, sino también las unidades o unos que cada decena tiene.

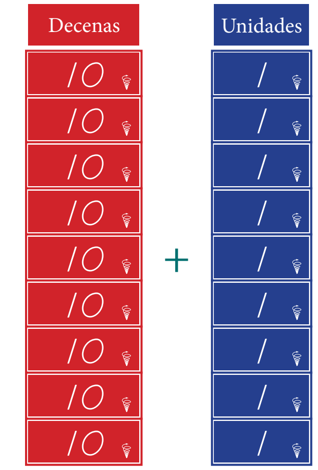
Si utilizamos notación desarrollada las Columnas de las Unidades y las Decenas podríamos visualizarlas de la siguiente manera.



40 + 7 = 47



70 + 3 = 73



90 + 9 = 99

10 + 5 = 15	40 + 4 = 44	30 + 3 = 33
80 + 1 = 81	20 + 9 = 29	50 + 2 = 52
60 + 0 = 60	70 + 6 = 76	90 + 7 = 97

Segundo Nivel de Abstracción

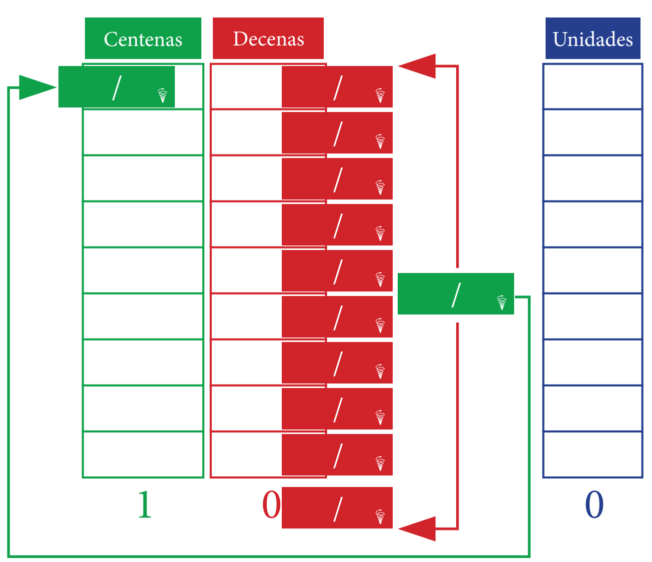
Los números del 100 al 999

La columna de las centenas

Una vez que hemos creado el número 99, tanto la Columna de las Unidades como la Columna de la Decenas están llenas.

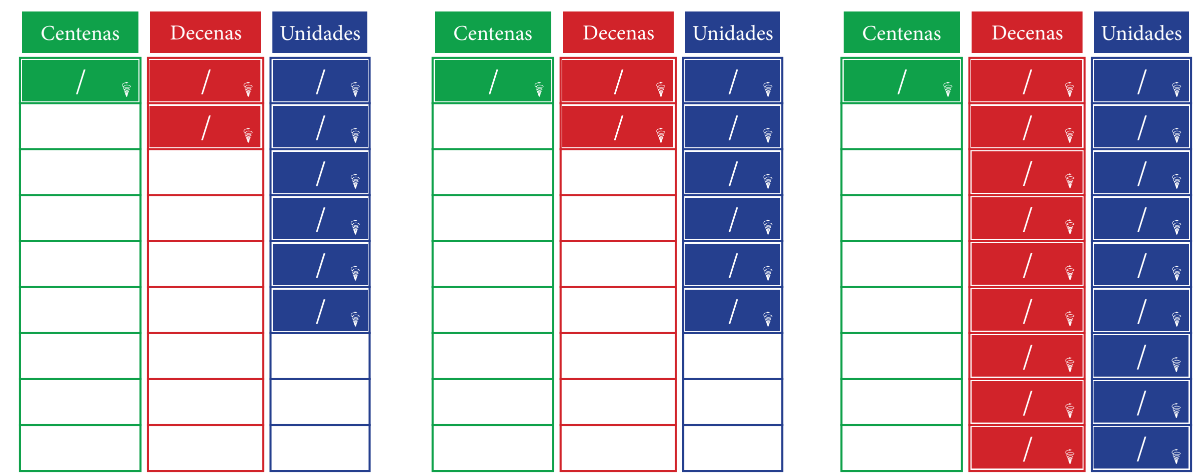
Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, colocamos otra decena en la Columna de las Decenas y creamos una nueva unidad a la cual llamamos centena porque contiene diez decenas que son cien unidades o unos.

Esta nueva unidad la centena, la movemos a la columna de la izquierda la cual se llama Columna de las Centenas.



Hemos creado el número 100, cuyo nombre es cien.

Colocamos decenas en la Columna de las Decenas y unidades o unos en la Columna de las Unidades para crear más números. El nombre de los números es muy sencillo ya que solamente tenemos que agregar la palabra ciento.



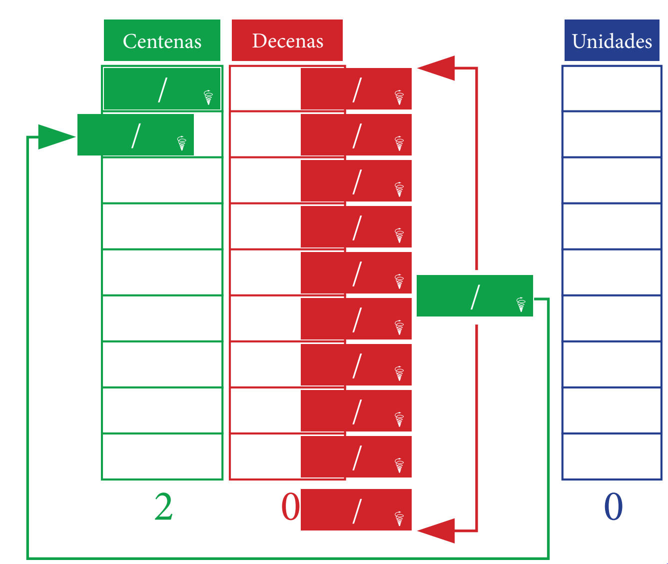
1 2 6 — Ciento veintiséis

1 5 8 — Ciento cincuenta y ocho

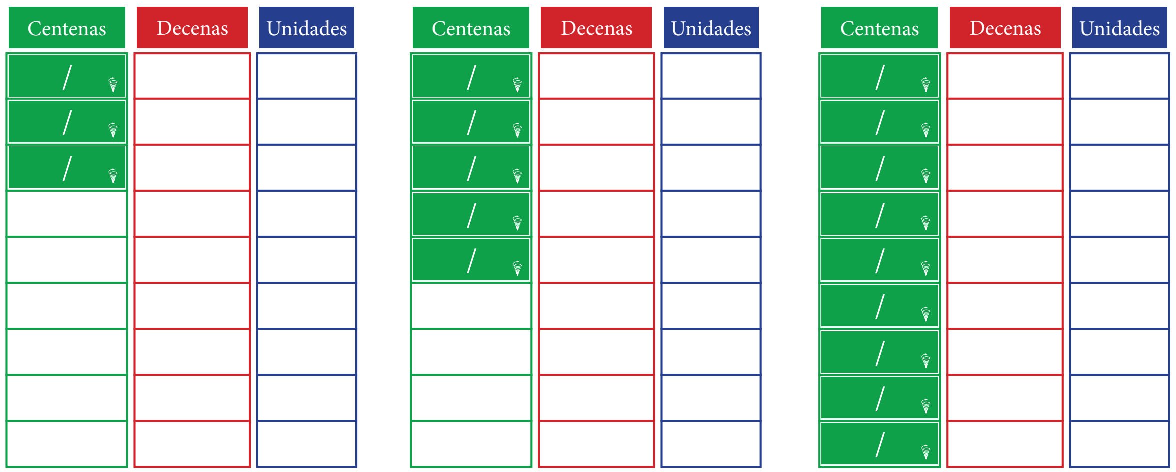
1 9 9 — Ciento noventa y nueve

Ahora que hemos creado el número 199 utilizamos la dinámica básica del sistema de numeración decimal para crear otra centena.

Hemos creado el número 200. El nombre del número es doscientos.



Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal creamos los números: 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900. Los nombres de los números son: trescientos, cuatrocientos, quinientos, seiscientos, setecientos, ochocientos, novecientos.

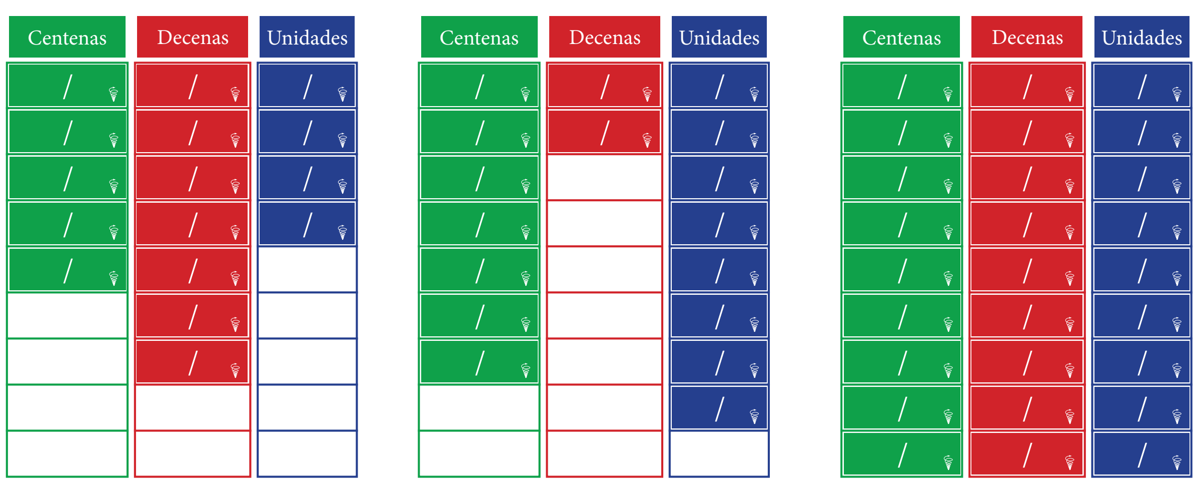


3 0 0 — Trescientos

5 0 0 — Quinientos

9 0 0 — Novecientos

Colocamos decenas en la Columna de las Decenas y unidades o unos en la Columna de las Unidades los números hasta el 999.



5 7 4 — Quinientos setenta y cuatro

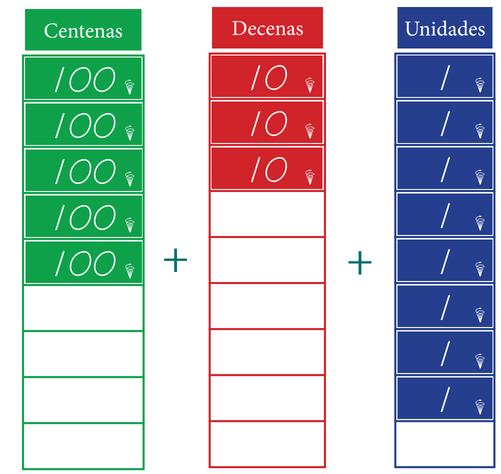
7 2 8 — Setecientos veintiocho

9 9 9 — Novecientos noventa y nueve

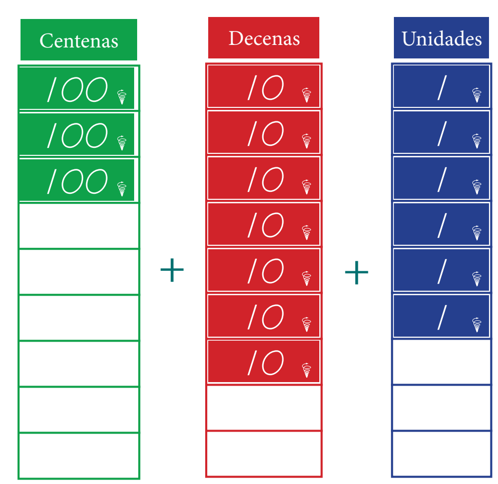
Notación desarrollada

Para escribir los números que hemos creado en notación desarrollada, tomamos en cuenta la posición de la columna y las unidades o unos que cada decena y cada centena tienen.

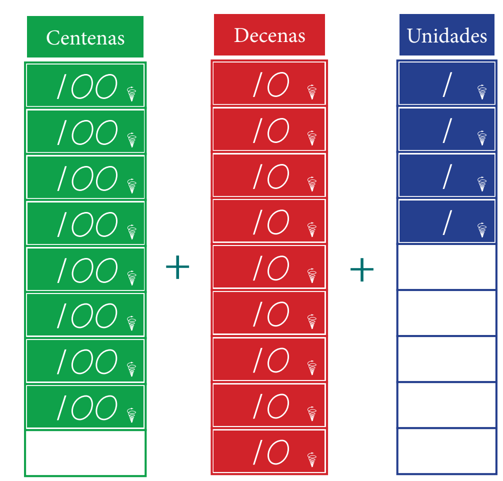
Si utilizamos notación desarrollada las Columnas de las Unidades, las Decenas y las Centenas, podríamos visualizarlas de la siguiente manera.



500 + 30 + 8 = 538



300 + 70 + 6 = 376



800 + 90 + 4 = 894

100 + 80 + 6 = 186   300 + 20 + 3 = 323   800 + 60 + 9 = 869

900 + 50 + 5 = 955   700 + 70 + 1 = 771   400 + 30 + 2 = 432

500 + 10 + 8 = 518   200 + 40 + 7 = 247   600 + 90 + 4 = 694

Tercer Nivel de Abstracción

Los números naturales

Unidades, decenas y centenas de millar

La dinámica básica del sistema de numeración decimal nos permite seguir creando números sin nunca poder terminar. Por eso decimos que hay una cantidad infinita de números.

Para crear los números naturales necesitamos solamente dos ingredientes:

Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0.
Las Columnas Numéricas.

Las columnas numéricas se recorren de derecha a izquierda, en dirección contraria a la manera como nosotros escribimos. Para escribir una palabra empezamos a la izquierda y seguimos hacia la derecha. Para crear las columnas numéricas empezamos a la derecha y seguimos hacia la izquierda.

Los Árabes inventaron las columnas numéricas y ellos escriben de derecha a izquierda, y es de esa forma como las construyeron.

La dinámica básica del sistema de numeración decimal establece que las columnas numéricas de las unidades, decenas y centenas se repiten en forma cíclica. A cada ciclo en el que se repiten las tres columnas le damos un nombre.

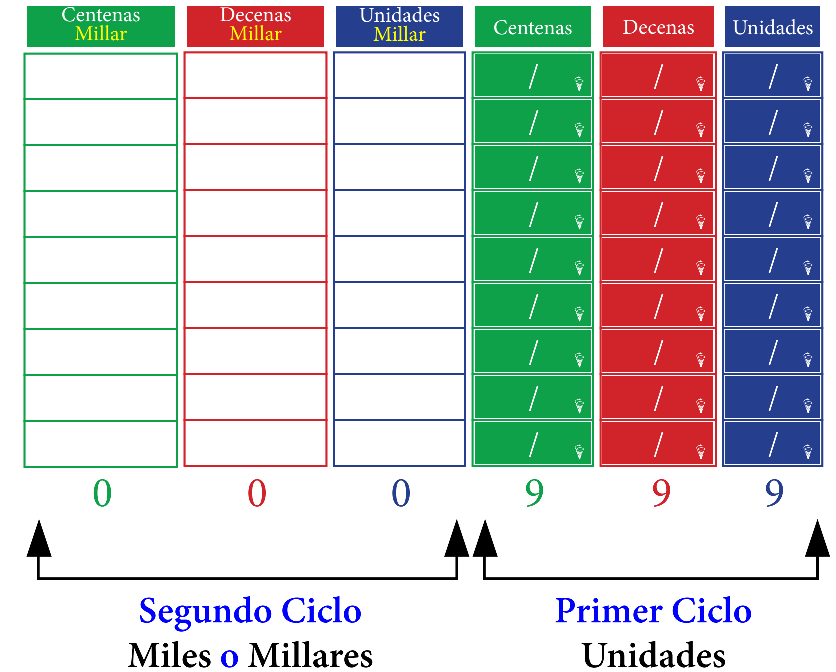
El nombre que le asignamos a ese ciclo de tres columnas corresponde a la cantidad de unidades o unos que la Columna de las Unidades en ese ciclo tiene.

En el primer ciclo de tres columnas, el que hasta ahora hemos creado, la Columna de las Unidades tiene solamente 1 unidad o uno. A este primer ciclo de tres columnas le llamamos el ciclo de las unidades.

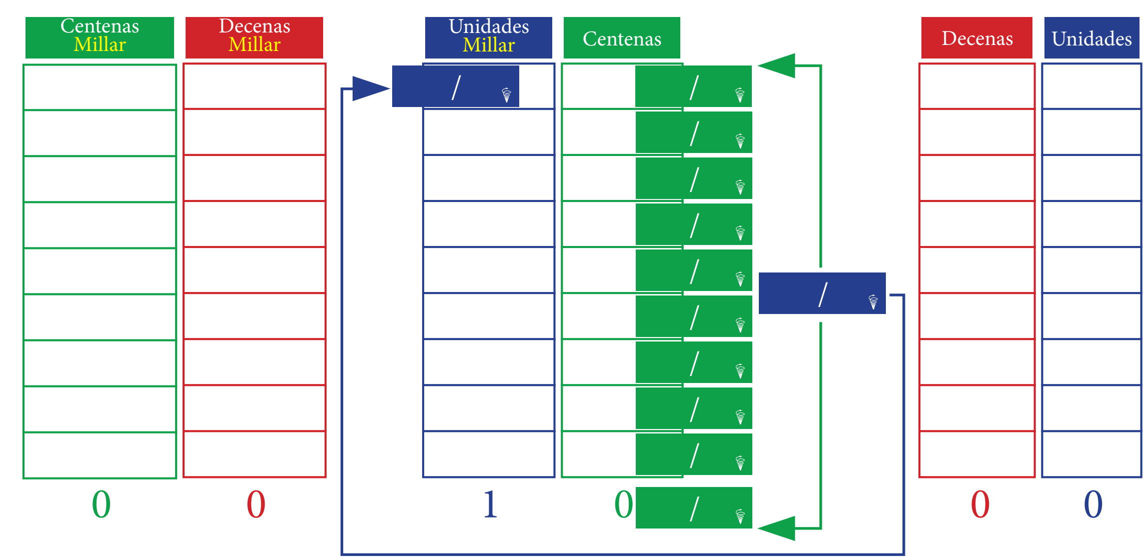
En el segundo ciclo de tres columnas que vamos a crear, en la Columna de las Unidades hay 1,000 unidades o unos. Al número 1,000 le llamamos mil, por lo cual este ciclo de tres columnas se llamará de los miles o millares.

Vamos a tener las Columnas de las Unidades, Decenas y Centenas de mil o de millar.

Al primer ciclo de tres columnas que hemos creado, le añadimos el segundo ciclo de tres columnas especificando que se trata del ciclo de los miles o millares.

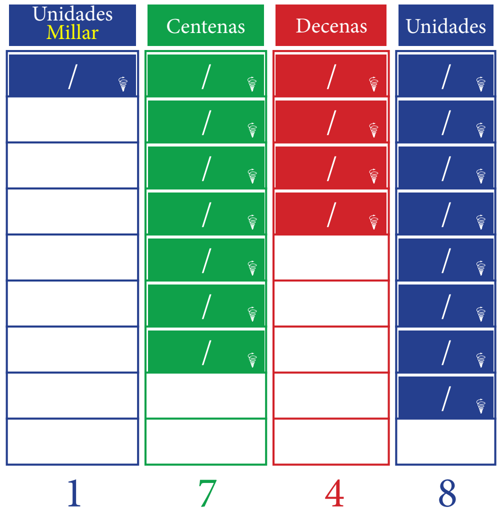


Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, colocamos otra centena en la Columna de las Centenas y creamos una nueva unidad a la cual llamamos unidades de millar porque contiene diez centenas que son mil unidades o unos.

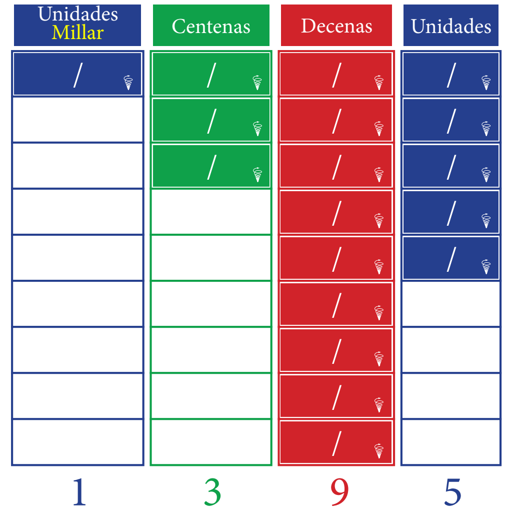


Hemos creado el número 1,000. El nombre del número es mil.

Colocamos centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes y creamos más números. Los nombres de estos números empezarán con el apellido mil.



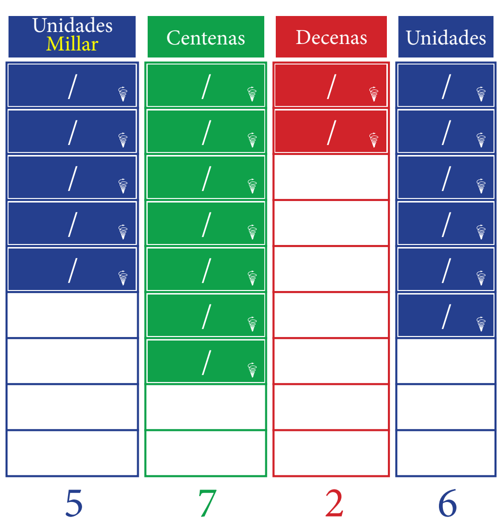
Mil setecientos cuarenta y ocho



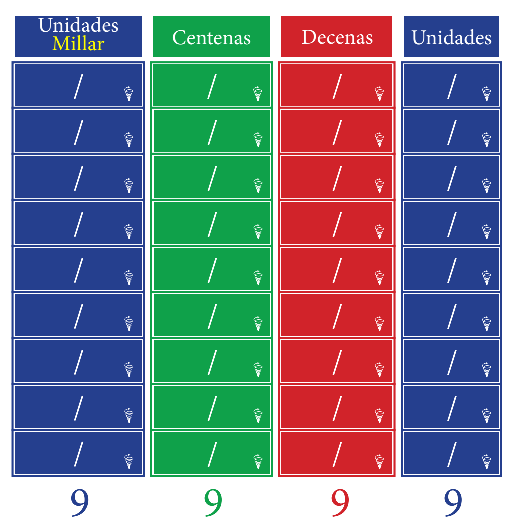
Mil trescientos noventa y cinco

Siguiendo la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 2,000, 3,000, 4,000, 5,000, 6,000, 7,000, 8,000, 9,000. Los nombres de los números son: dos mil, tres mil, cuatro mil, cinco mil, seis mil, siete mil, ocho mil, nueve mil.

Colocamos centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes y creamos más números. El apellido de todos estos números es mil.



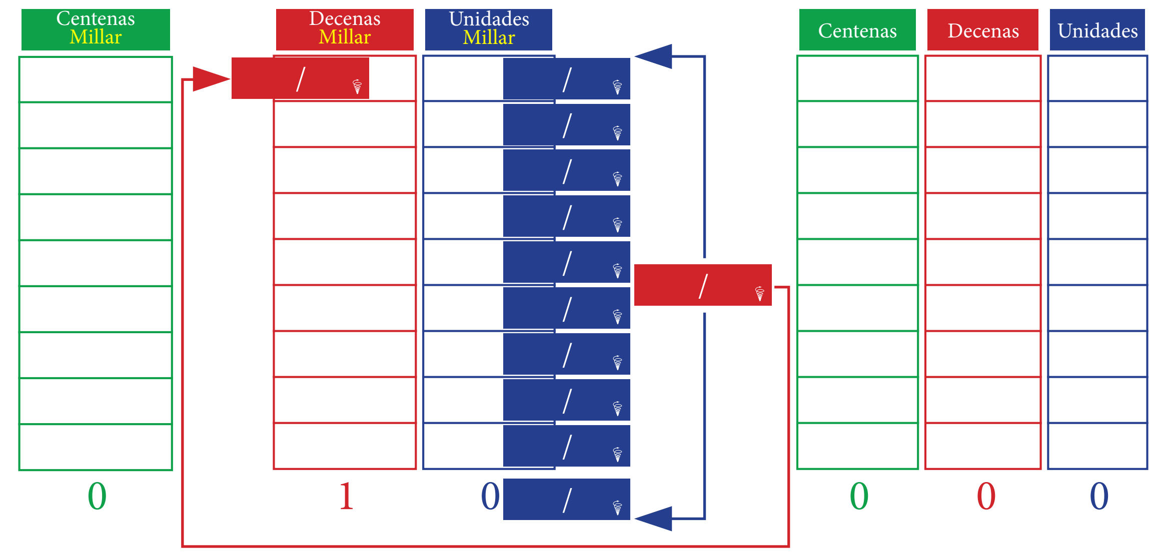
Cinco mil setecientos veintiséis



Nueve mil novecientos noventa y nueve

Ahora que hemos entendido, demostrado y aplicado la dinámica básica del sistema de numeración decimal para crear números, la utilizamos para seguir creando números.

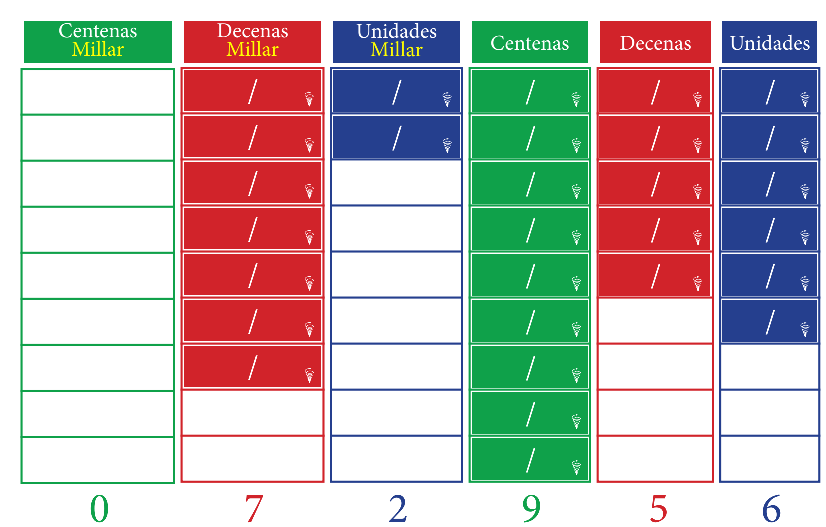
Una vez que hemos creado el número 9,999, colocamos otra unidad de millar o mil y creamos una decena de millar o de mil.



Creamos el número 10,000. Es muy sencillo deducir que el nombre del número es diez mil. Una decena en el ciclo de los millares o miles.

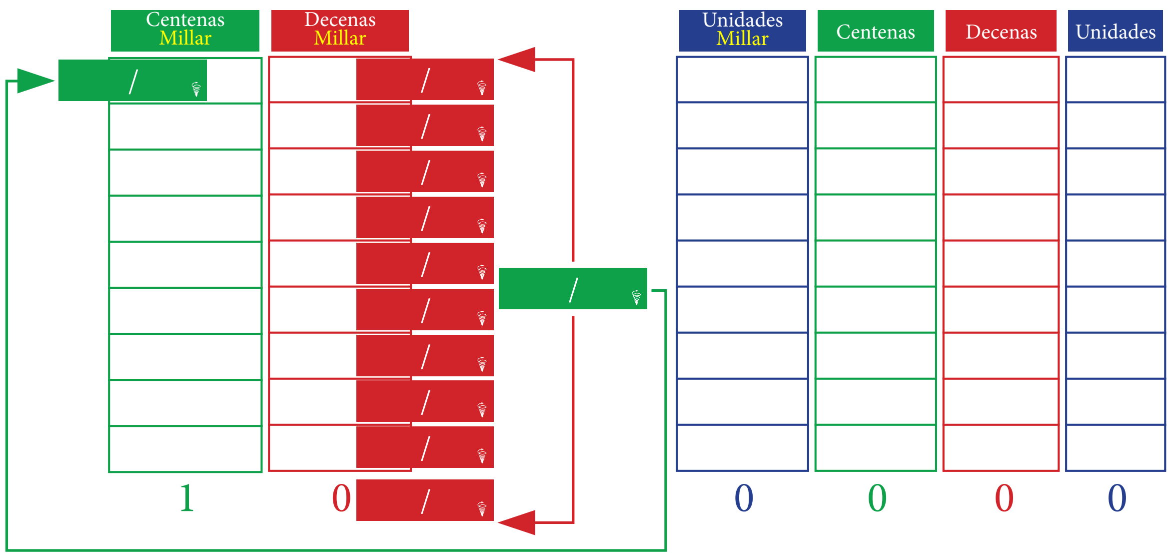
Aplicando la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 20,000, 30,000, 40,000, 50,000, 60,000, 70,000, 80,000, 90,000. Sabemos que los nombres de los números son: veinte mil, treinta mil, cuarenta mil, cincuenta mil, sesenta mil, setenta mil, ochenta mil, noventa mil.

Colocamos unidades de millar, centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes para crear más números.



Setenta y dos mil novecientos cincuenta y seis

Resulta muy sencillo crear una centena de millar, ya que diez decenas de millar forman una centena de millar. Es exactamente lo mismo que hicimos en el primer ciclo, en el ciclo de las unidades.



Creamos el número 100,000. Es muy sencillo deducir que el nombre del número es cien mil. Una centena en el ciclo de los millares o miles.

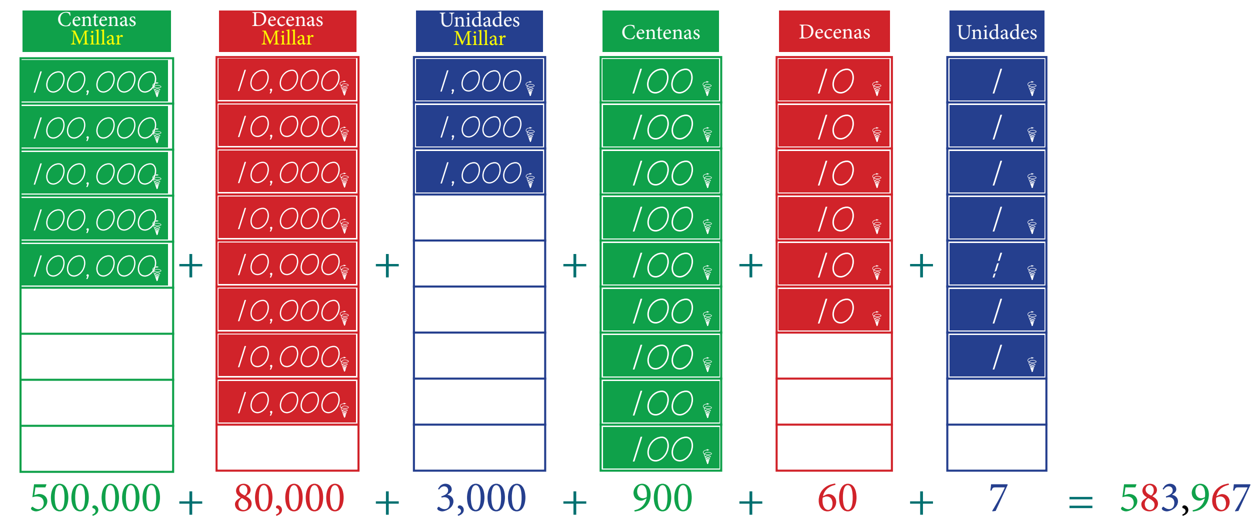
Aplicando la dinámica básica del sistema de numeración decimal, creamos los números: 200,000, 300,000, 400,000, 500,000, 600,000, 700,000, 800,000, 900,000. Sabemos que los nombres de los números son: doscientos mil, trescientos mil, cuatrocientos mil, quinientos mil, seiscientos mil, setecientos mil, ochocientos mil, novecientos mil.

Colocamos decenas de millar, unidades de millar, centenas, decenas y unidades en sus columnas correspondientes para crear más números.

Setecientos cuarenta y nueve mil doscientos sesenta y tres

Notación desarrollada

Para escribir los números en notación desarrollada, tomamos en cuenta la posición de la columna y las unidades o unos que cada decena y cada centena en cada ciclo de tres columnas tienen.



Visualizamos las Columnas de las Unidades, las Decenas y las Centenas, utilizando notación desarrollada de la siguiente manera.

500,000 + 80,000 + 3,000 + 900 + 60 + 7 = 583,967

900,000 + 20,000 + 4,000 + 100 + 70 + 3 = 924,173

200,000 + 50,000 + 0,000 + 700 + 90 + 4 = 250,794

700,000 + 40,000 + 8,000 + 100 + 30 + 9 = 748,139

400,000 + 90,000 + 6,000 + 200 + 80 + 5 = 496,285

Los números naturales enteros

La cantidad de números que podemos crear es infinita

Para crear los números naturales necesitamos solamente dos ingredientes:

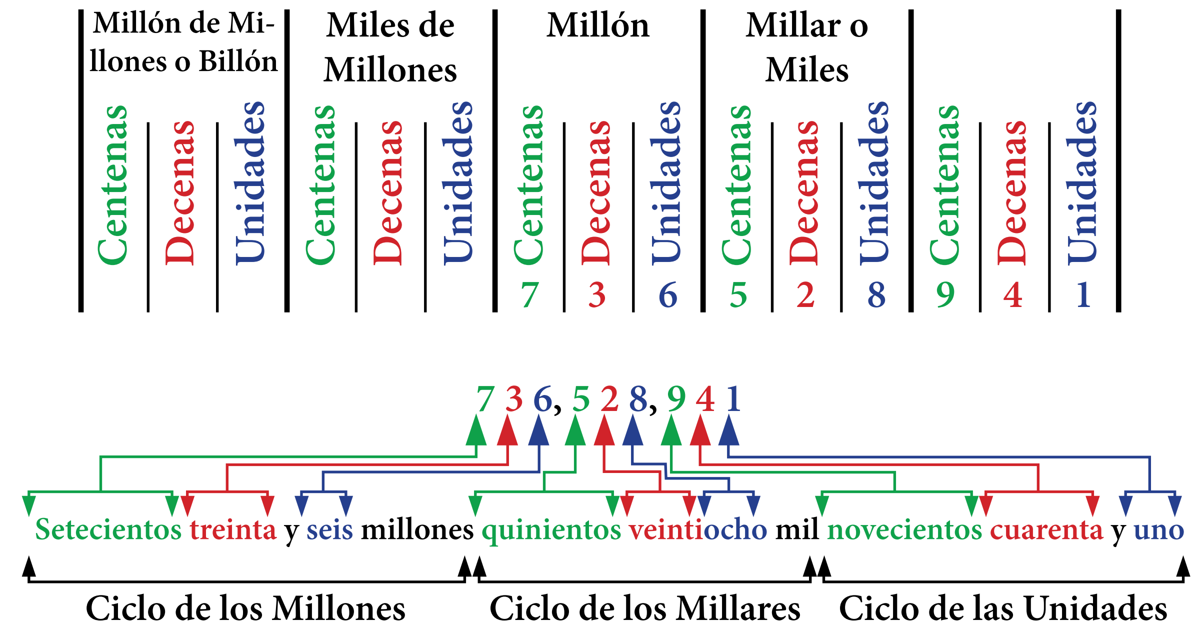
Los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y el 0.
Las Columnas Numéricas.

La dinámica básica del sistema de numeración decimal establece que las columnas numéricas de las unidades, decenas y centenas se repiten en forma cíclica. A cada ciclo en el que se repiten las tres columnas le damos un nombre.

El nombre que le asignamos a ese ciclo de tres columnas corresponde a la cantidad de unidades o unos que la Columna de las Unidades en ese ciclo tiene.

Los ciclos de las columnas numéricas son:

Primer Ciclo:	Unidades.
Segundo Ciclo:	Millares o Miles.
Tercer Ciclo:	Millones.
Cuarto Ciclo:	Miles de Millones.
Quinto Ciclo:	Millones de Millones o Billones.



Cuarto Nivel de Abstracción

Recorrer las columnas numéricas de derecha a izquierda

Multiplicar por 10

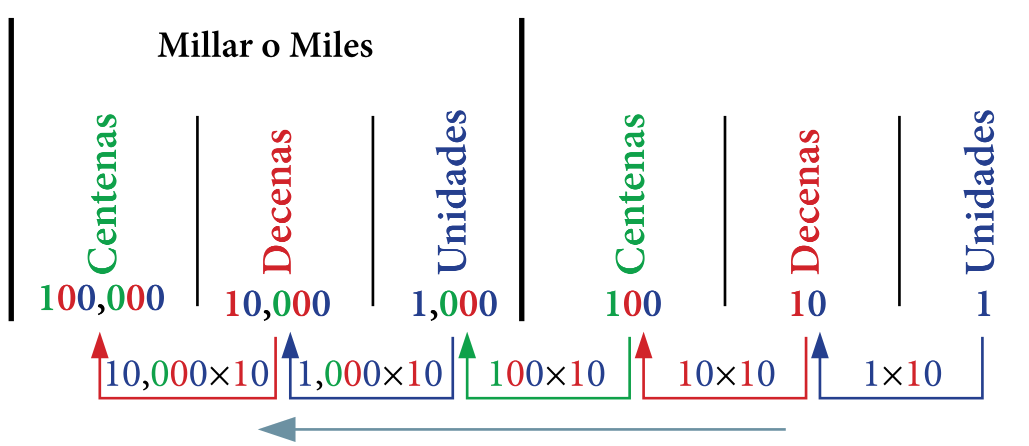
Al sistema de numeración le llamamos *decimal* porque está basado en el número 10, ya que utilizamos los dedos de las manos para crear los 10 símbolos que construyen todos los números naturales.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Porque el sistema de numeración decimal tiene 10 símbolos, también se llama sistema de numeración base 10.

Por lo cual, cuando pasamos de la columna de las unidades a la columna de las decenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 decena tiene 10 unidades.

Cuando pasamos de la columna de las decenas a la columna de las centenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 centena tiene 10 decenas.

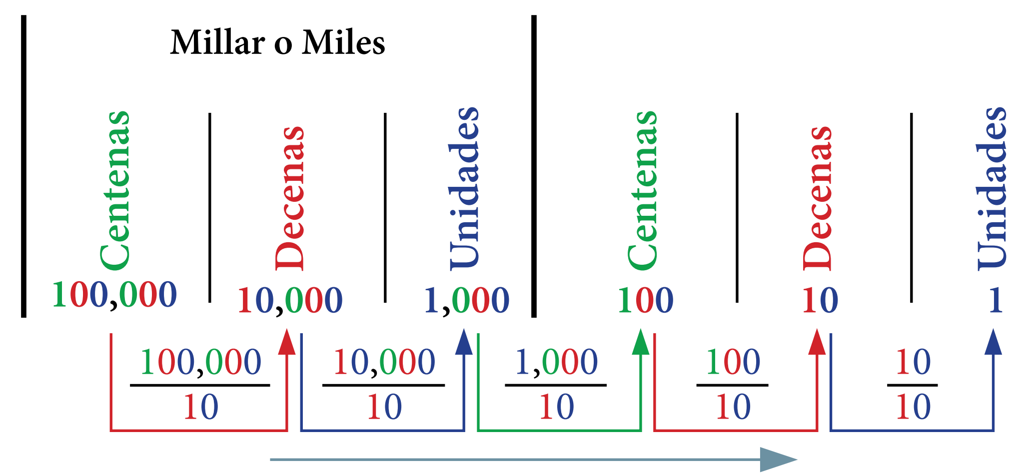


Recorriendo las columnas numéricas de *derecha* a *izquierda* **multiplicamos** por 10.

Recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha

Dividir entre 10

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual, al recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha, dividimos entre 10.



Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

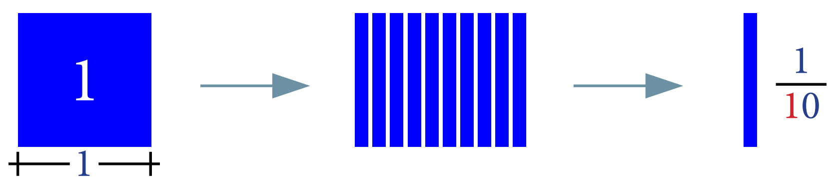
Crear columnas a la derecha de las unidades

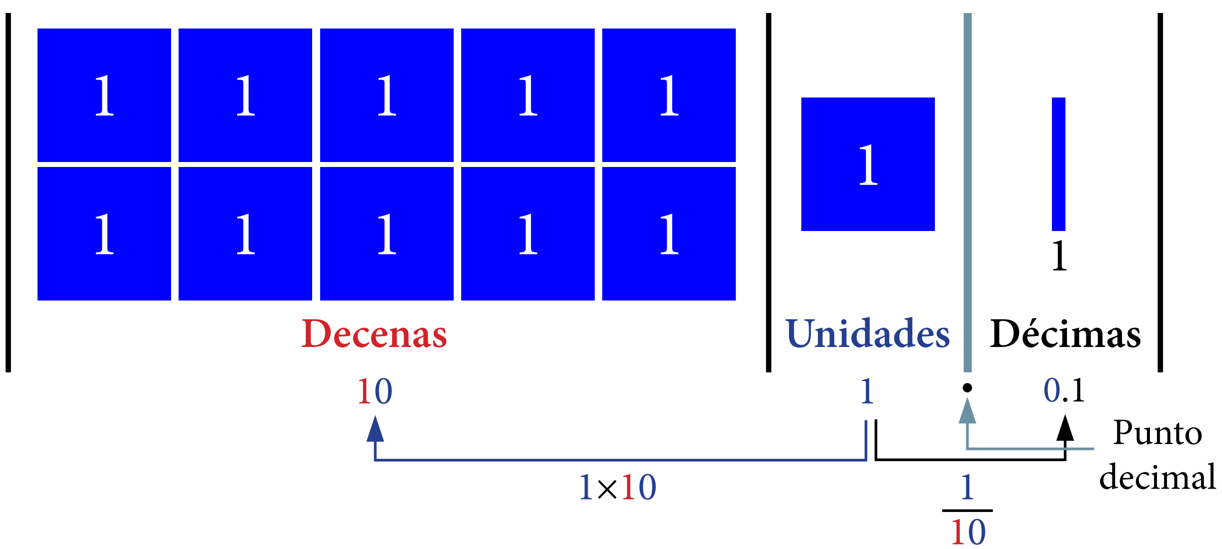
Columna de las décimas

Si queremos crear una columna a la *derecha* de la columna de las unidades, recorremos las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha*, por lo cual *dividimos* la unidad entre 10.

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

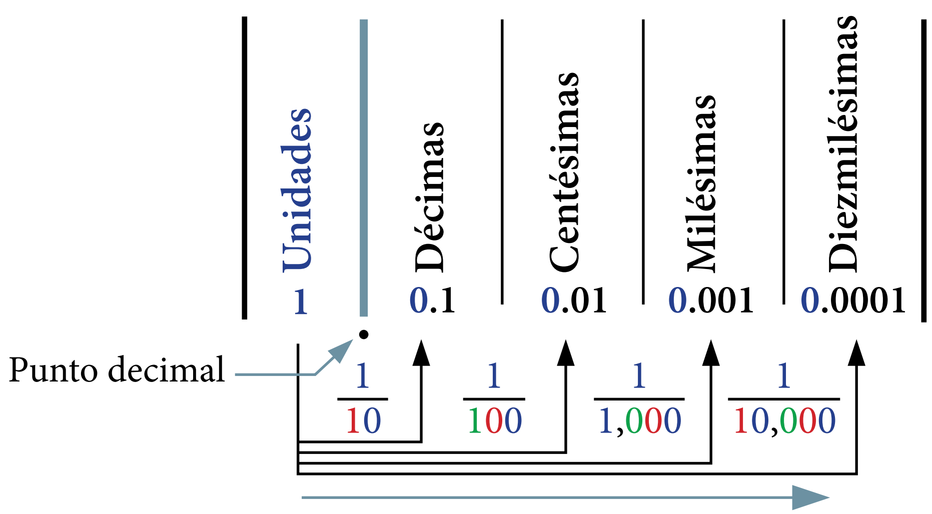
Utilizando los conceptos de división y de fracción, hemos dividido en 10 partes iguales la unidad, cada parte es *una* de *diez* o 1 décimo de la unidad.





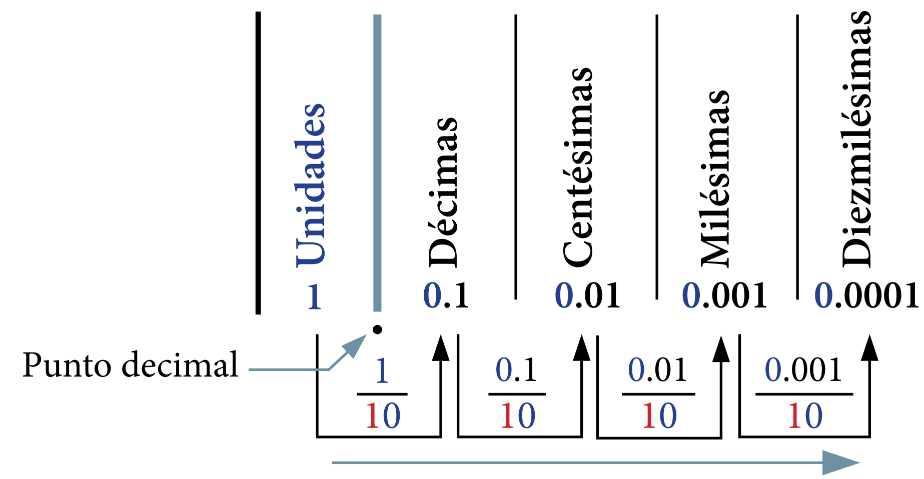
Punto decimal

El *punto decimal* nos permite diferenciar las columnas numéricas a la *izquierda* de la columna de las unidades y las columnas numéricas a la *derecha* de la columna de las unidades.



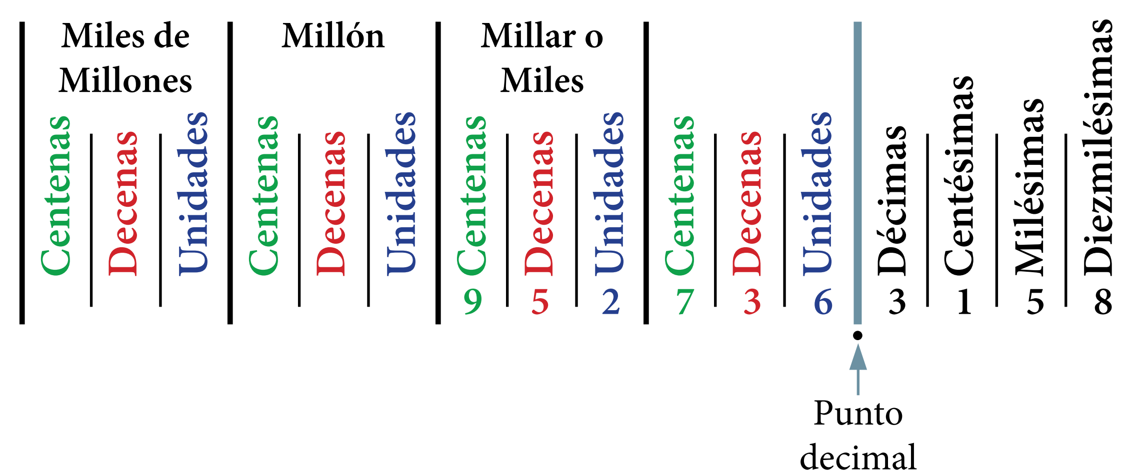
Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

Utilizando notación decimal la división entre 10 podemos expresarla de la siguiente manera.



Columnas numéricas con decimales

A los dígitos a la *derecha* del punto decimal les llamamos *decimales*, porque al recorrer las columnas de *izquierda* a *derecha*, la unidad de la columna que se encuentra a la *derecha* es una *décima* de la unidad de la columna que se encuentra a la *izquierda*.



Todas las columnas numéricas, tanto a la derecha como a la izquierda del punto decimal, se comportan exactamente de la misma manera.

Cuarto Nivel de Abstracción

El número 1

Con el número 1 y la suma construimos los dígitos

Utilizando el dígito 1 y la operación *suma* hemos construido los otros ocho dígitos.

El dígito 1 es muy especial ya que junto con la operación *suma* crea los otros ocho dígitos.

Para indicar que no hay ningún objeto o dimensión, utilizamos el símbolo 0, al que llamamos cero.

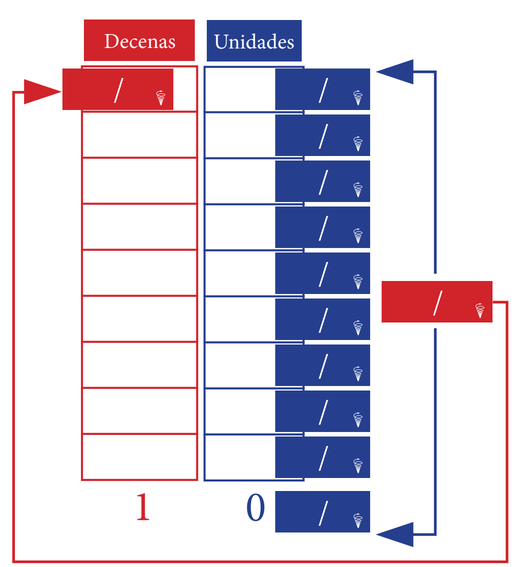
1
1 + 1 = 2
1 + 1 + 1 = 3
1 + 1 + 1 + 1 = 4
1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 9

Dinámica básica del sistema de numeración decimal

Con el número 1 y las columnas numéricas construimos los números

En cada una de las columnas numéricas podemos *sumar* 1 nueve veces. Si *sumamos* otro 1, entonces formamos una nueva unidad, la cual movemos a la columna de la izquierda.

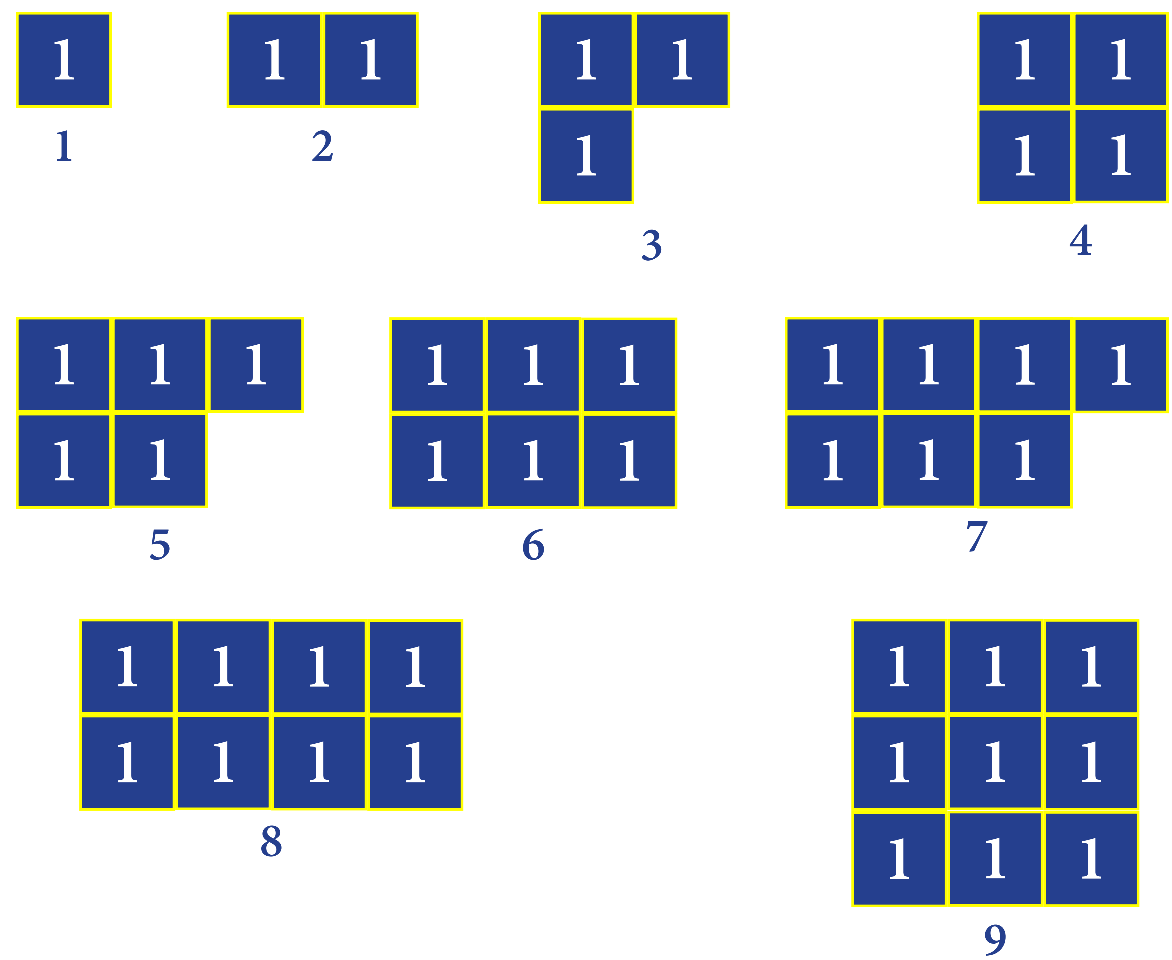
Lo que hemos hecho para crear todos los números es utilizar la dinámica básica del sistema de numeración decimal.



Representación geométrica de los nueve dígitos

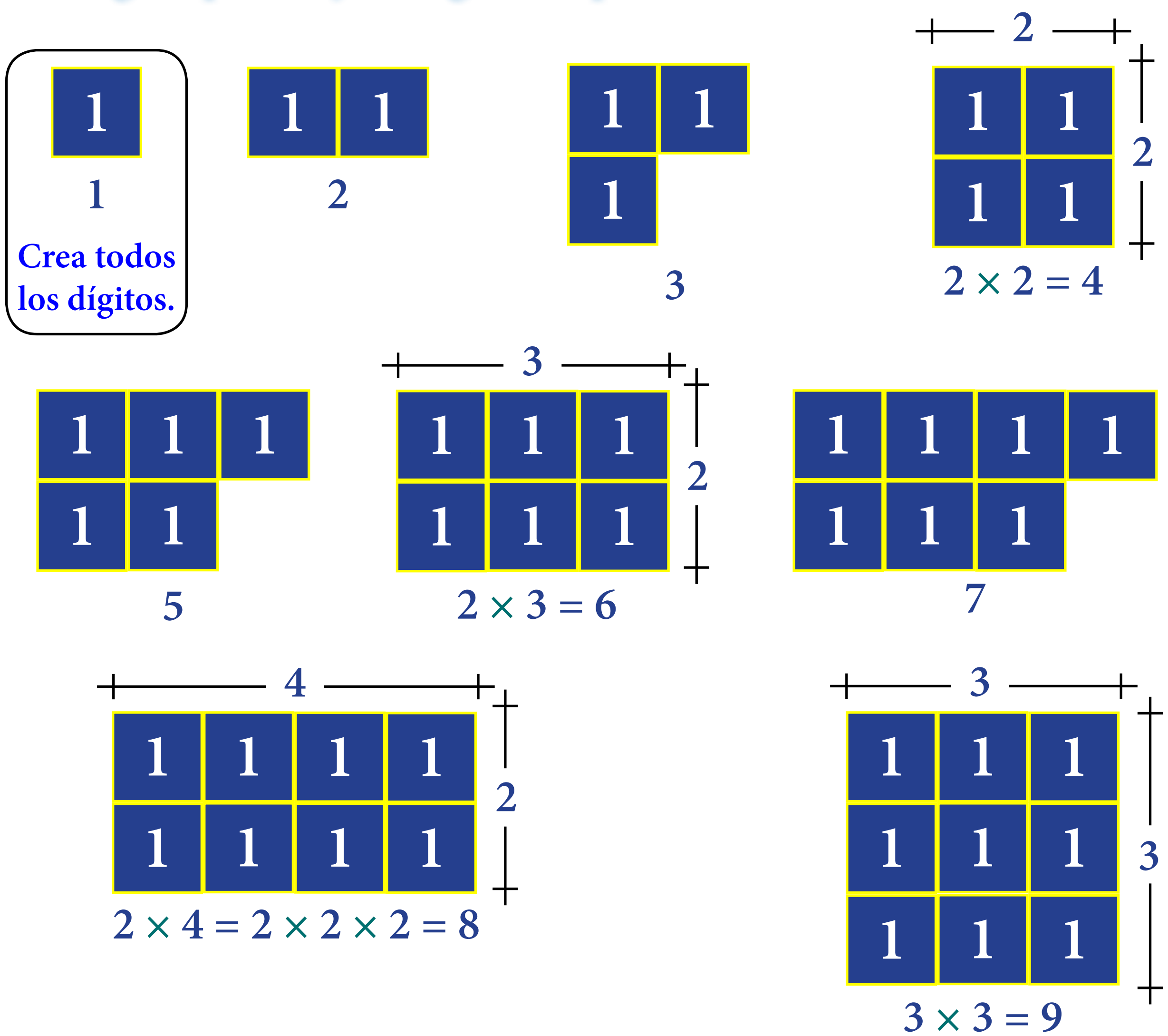
Los números representan objetos de la naturaleza. Vamos a utilizar el área de un cuadrado para representar el número 1.

Representamos los 9 dígitos utilizando cuadritos.



Descubrimos que *cuatro* de los *ocho* dígitos creados con el dígito 1 y la operación *suma*, que también pueden ser creados utilizando la operación *multiplicación*.

Los dígitos primos y los dígitos no primos



Descubrimos que los nueve dígitos pueden clasificarse en tres grupos.

Clasificación de los nueve dígitos

Los nueve dígitos se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los dígitos.

2. Dígitos Primos o Primarios: 2, 3, 5, 7.

   Solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*.

3. Dígitos No Primos o No Primarios: 4, 6, 8, 9.

   Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación *multiplicación*.

Los números naturales

El conjunto de los números naturales, contiene aquellos números con los cuales contamos los objetos de la naturaleza.
El primer número natural es 1 y no se puede identificar el último número, ya que el conjunto es infinito, es decir, siempre es posible crear un número más, sumando 1.

Al igual que los ocho dígitos, algunos números naturales solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*, pero otros números naturales pueden ser creados también utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Clasificación de los números naturales

Los números naturales se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los números.

2. Números Primos o Primarios.

   Solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*.

3. Números No Primos o No Primarios.

   Pueden ser creados utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Los números primos y no primos

No es sencillo obtener una tabla de *números* primos porque no guardan una secuencia, ya que aparecen en forma irregular. Resulta más sencillo identificar a los *números* no primos, ya que sabemos que algunos se construyen multiplicando los *cuatro dígitos* primos.

Los dígitos primos o primarios que utilizamos para empezar a construir los números no primos son: 2, 3, 5, 7.

Vamos a utilizarlos para crear algunos *números* no primos.

$2 \times 5 = 10$	$5 \times 5 = 25$	$2 \times 19 = 38$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 13 = 26$	$3 \times 13 = 39$
$2 \times 7 = 14$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$
$3 \times 5 = 15$	$2 \times 2 \times 7 = 28$	$2 \times 3 \times 7 = 42$
$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 2 \times 11 = 44$
$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	$3 \times 3 \times 5 = 45$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$3 \times 11 = 33$	$2 \times 23 = 46$
$3 \times 7 = 21$	$3 \times 17 = 34$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 48$
$2 \times 11 = 22$	$5 \times 7 = 35$	$2 \times 5 \times 5 = 50$
$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$3 \times 17 = 51$

Utilizamos los *números* no primos que hemos creado para identificar los *números* primos del 1 al 50.

1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	4	$\boxed{5}$	6	$\boxed{7}$	8	9	10
$\boxed{11}$	12	$\boxed{13}$	14	15	16	$\boxed{17}$	18	$\boxed{19}$	20
21	22	$\boxed{23}$	24	25	26	27	28	$\boxed{29}$	30
$\boxed{31}$	32	33	34	35	36	$\boxed{37}$	38	39	40
$\boxed{41}$	42	$\boxed{43}$	44	45	46	$\boxed{47}$	48	49	50

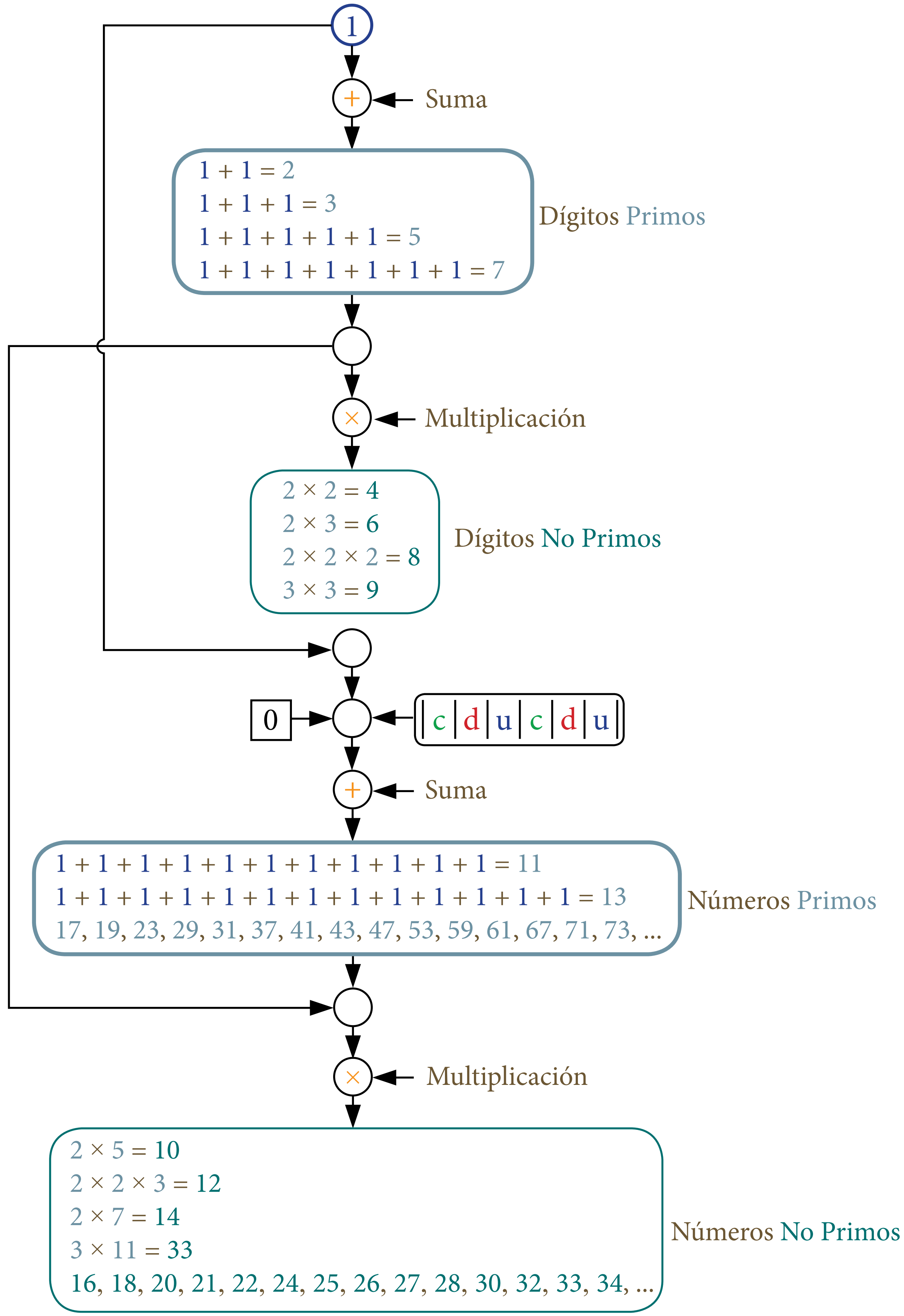
Todos los *números* primos los hemos creado con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la *operación suma*.

$1 + 1 = 2$
$1 + 1 + 1 = 3$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 7$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 11$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 13$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 17$
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 19$

Teorema fundamental de la aritmética

Todos los *números* primos se crean con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la operación *suma*.
Todos los *números* no primos se crean con los *números* primos y la operación *multiplicación*.

Árbol genealógico de los números naturales



Capítulo 2

Dinámica de los Números Naturales

Dinámica de los Números Fraccionarios

Clasificación de los Números Reales

Dinámica de los Números Reales Positivos

Cuarto Nivel de Abstracción

Introducción

Los conceptos previos necesarios para abordar la dinámica de los números reales positivos son: la clasificación de los nueve dígitos, la clasificación de los números naturales y el teorema fundamental de la aritmética.

Clasificación de los nueve dígitos

Los nueve dígitos se clasifican de la siguiente manera.

1. Dígito 1.

   Utilizando la operación *suma* genera todos los dígitos.

2. Dígitos Primos o Primarios: 2, 3, 5, 7.

   Solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*.

3. Dígitos No Primos o No Primarios: 4, 6, 8, 9.

   Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación *multiplicación*.

Clasificación de los números naturales

Los números naturales se clasifican de la siguiente manera.

1. Números Primos o Primarios.

   Solamente pueden ser creados utilizando el *dígito* 1 y la operación *suma*.

2. Números No Primos o No Primarios.

   Pueden ser creados utilizando los *cuatro dígitos* primos y la operación *multiplicación*.

Teorema fundamental de la aritmética

Todos los *números* primos se crean con el *dígito* 1, las *columnas numéricas* y la operación *suma*.
Todos los *números* no primos se crean con los *números* primos y la operación *multiplicación*.

Factores primos de un número no primo

Los *números* primos que al multiplicarlos crean un *número* no primo se llaman los *factores* primos del número.

$$2 \times 7 = 14 \longleftarrow \textit{Número}\text{ no primo}$$

Factores primos

$$2 \times 3 \times 7 = 42 \longleftarrow \textit{Número}\text{ no primo}$$

Factores primos

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \longleftarrow \textit{Número}\text{ no primo}$$

Factores primos

Los factores primos dividen en forma exacta al número

Al multiplicar los *factores* primos creamos un *número* no primo por lo tanto, los *factores* primos dividen en forma exacta al *número* no primo.

$$2 \times 7 = 14 \longrightarrow \frac{14}{7} = 2 \longrightarrow \frac{14}{2} = 7$$

$$2 \times 3 \times 7 = 42 \longrightarrow \frac{42}{2} = 21 \longrightarrow \frac{42}{3} = 14 \longrightarrow \frac{42}{7} = 6$$

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32 \longrightarrow \frac{32}{2} = 16$$

Números divisibles entre 2

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 2 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 2.

$2 \times 2 = 4$	$2 \times 5 = 10$	$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$	$2 \times 11 = 22$
$2 \times 3 = 6$	$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$
$2 \times 2 \times 2 = 8$	$2 \times 7 = 14$	$2 \times 2 \times 5 = 20$	$2 \times 13 = 26$

Todos los *números* no primos creados son pares, por lo tanto todos los *números* pares son divisibles entre 2.

Números divisibles entre 3

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 3.

$2 \times 3 = 6$	$3 \times 5 = 15$	$2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$	$3 \times 11 = 33$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$3 \times 7 = 21$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 13 = 39$

Analizando con detenimiento los *números* no primos que hemos creado, nos damos cuenta que la suma de los *dígitos* que forman el *número* no primo es divisible entre 3.

$2 \times 3 = 6 \rightarrow \frac{6}{3} = 2$ $\qquad$ $2 \times 2 \times 3 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3 \rightarrow \frac{3}{3} = 1$

$3 \times 3 = 9 \rightarrow \frac{9}{3} = 3$ $\qquad$ $3 \times 5 = 15 \rightarrow 1 + 5 = 6 \rightarrow \frac{6}{3} = 2$

$2 \times 3 \times 3 = 18 \rightarrow 1 + 8 = 9 \rightarrow \frac{9}{3} = 3$

Números divisibles entre 5

Utilizando como uno de los *factores* primos el *dígito* 5 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 5.

$2 \times 5 = 10$	$5 \times 5 = 25$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$	$5 \times 11 = 55$
$3 \times 5 = 15$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$3 \times 3 \times 5 = 45$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$5 \times 7 = 35$	$2 \times 5 \times 5 = 50$	$5 \times 13 = 65$

Todos los *números* no primos creados terminan en 0 o en 5, por lo tanto todos los *números* no primos que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.

Números divisibles entre 6

Utilizando como dos de los *factores* primos el *dígito* 2 y el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 6.

$2 \times 3 = 6$	$2 \times 3 \times 3 = 18$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$
$2 \times 2 \times 3 = 12$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 3 \times 7 = 42$	$2 \times 3 \times 3 \times 5 = 90$

Cuando el *número* no primo es par y la *suma* de los *dígitos* que lo forman es divisible entre 3 el *número* no primo es divisible entre 2, 3 y 6.

Números divisibles entre 9

Utilizando dos veces como *factor* primo el *dígito* 3 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 3.

$3 \times 3 = 9$	$3 \times 3 \times 3 = 27$	$2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$	$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
$2 \times 3 \times 3 = 18$	$3 \times 3 \times 5 = 45$	$2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$	$3 \times 3 \times 3 \times 5 = 135$

Cuando la *suma* de los *dígitos* que forman un *número* no primo es divisible entre 9 el *número* no primo es divisible entre 3 y entre 9.

Números divisibles entre 10

Utilizando como dos de los *factores* primos el *dígito* 2 y el *dígito* 5 para crear *números* no primos los *números* no primos creados son divisibles entre 10.

$2 \times 5 = 10$	$2 \times 3 \times 5 = 30$	$2 \times 5 \times 5 = 50$	$2 \times 5 \times 7 = 70$
$2 \times 2 \times 5 = 20$	$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$	$2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$	$2 \times 3 \times 5 \times 5 = 150$

Cuando el *número* no primo termina en 0 el *número* no primo es divisible entre 2, 5 y 10.

Resumen de la divisibilidad de los números no primos

Divisible Entre	**Característica**
2	Número par.
3	La *suma* de los dígitos que lo forma es divisible entre 3.
5	Número que *termina* en 0 o en 5.
2, 3 y 6	Número par y la *suma* de los dígitos que lo forman es divisible entre 3.
3 y 9	La *suma* de los dígitos que lo forman es divisible entre 9.
2, 5 y 10	Número que *termina* en 0.

Números pares y números impares

La primer clasificación de los *números* es en pares e impares, dependiendo de son divisibles entre 2 o no.

1. Números Pares.

   Todos los números que son *divisibles* entre 2.

2. Números Impares.

   Todos los números que *no* son *divisibles* entre 2.

Descomponer un número no primo en sus factores primos

Los números no primos los creamos multiplicando *números* primos a los que llamamos *factores* primos del *número*.

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual los *factores* primos que componen un número lo dividen en forma exacta.

Descomponer un *número* en sus *factores* primos, consiste en utilizar la división para encontrar los *factores* primos que lo componen.

Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos

El algoritmo consiste en un procedimiento lógico y ordenado de seis pasos.

1. Escribir el *número* no primo y frente a él una raya vertical.
2. Encontrar el *número* primo mas pequeño que divide al *número* no primo en forma exacta. Escribir este *número* primo a la derecha de la raya vertical.
3. Dividir el *número* no primo entre el *número* primo y escribir el resultado debajo del *número* no primo.
4. Encontrar el *número* primo más pequeño que divide al *número* no primo del paso 3. Escribir este *número* primo a la derecha de la raya vertical.
5. Dividir el *número* no primo entre el *número* primo y escribir el resultado debajo del *número* no primo.
6. Repetir el procedimiento tantas veces como sea necesario hasta que el resultado de la división sea 1.

		$\div$	
Número no primo →	54	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	27	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	9	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	3	3	← *Factor* primo
Uno →	1		

Los *factores* primos que crean el *número* son: $2 \times 3 \times 3 \times 3 = 54$

		÷	
Número no primo →	252	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	126	2	← *Factor* primo
Resultado de la división →	63	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	21	3	← *Factor* primo
Resultado de la división →	7	7	← *Factor* primo
Uno →	1		

Los *factores* primos que crean el *número* son: $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 252$

Los factores primos y la divisibilidad de un número

Todos los *factores* primos que forman un *números* no primos lo dividen en forma exacta. Todos los *números* no primos formados de la multiplicación de dos o más *factores* primos, también lo dividen en forma exacta.

Esta propiedad de los *factores* primos que forman un *número* no primo, es muy importante para entender y demostrar el concepto del mínimo común múltiplo, o mínimo común denominador.

Los *factores* primos que crean el *número* no primo 54 son: 2, 3, 3 y 3. Los *números* no primos formados de las posibles multiplicaciones de dos o más *factores* primos son:

$$2 \times 3 = 6 \qquad 3 \times 3 = 9 \qquad 2 \times 3 \times 3 = 18 \qquad 3 \times 3 \times 3 = 27$$

Estos *números* no primos, también dividen en forma exacta 54.

$$\frac{54}{6} = 9 \qquad \frac{54}{9} = 6 \qquad \frac{54}{18} = 3 \qquad \frac{54}{27} = 2$$

Los *factores* primos que crean el *número* no primo 252 son: 2, 2, 3, 3 y 7. Los *números* no primos formados de las posibles multiplicaciones de dos o más *factores* primos son:

$$2 \times 2 = 4 \qquad 2 \times 7 = 14 \qquad 2 \times 2 \times 7 = 28 \qquad 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$
$$2 \times 3 = 6 \qquad 3 \times 7 = 21 \qquad 2 \times 3 \times 3 = 18 \qquad 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$$
$$3 \times 3 = 9 \qquad 2 \times 2 \times 3 = 12 \qquad 3 \times 3 \times 7 = 63 \qquad 2 \times 3 \times 3 \times 7 = 126$$

Estos *números* no primos, también dividen en forma exacta 252.

$$\frac{252}{4} = 63 \qquad \frac{252}{12} = 21 \qquad \frac{252}{21} = 12 \qquad \frac{252}{63} = 4$$
$$\frac{252}{6} = 42 \qquad \frac{252}{14} = 18 \qquad \frac{252}{28} = 9 \qquad \frac{252}{84} = 3$$
$$\frac{252}{9} = 28 \qquad \frac{252}{18} = 14 \qquad \frac{252}{36} = 7 \qquad \frac{252}{126} = 2$$

Los múltiplos de un número

Cuando un número lo multiplicamos por otros números, obtenemos múltiplos de ese número.

Por ejemplo, el número lo multiplicamos por 2, 3, 4, 5, etc.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 2 son:	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Los múltiplos de 3 son:	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
Los múltiplos de 5 son:	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Los múltiplos de 7 son:	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70

El común múltiplo de dos o más números

Aquellos múltiplos que son los mismos en dos o más números les llamamos común múltiplos.

Por ejemplo, los común múltiplos de 2 y 3 se obtienen de la siguiente manera:

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

Los común múltiplos de 2 y 3 son: 6, 12 y 18.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, todos los común múltiplos son divisibles entre el número que los genera.

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{2} = 6 \qquad \frac{18}{2} = 9$$
$$\frac{6}{3} = 2 \qquad \frac{12}{3} = 4 \qquad \frac{18}{3} = 6$$

Los común múltiplos de 2 y 5 se obtienen de la siguiente manera:

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Los común múltiplos de 2 y 5 son: 10 y 20.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, todos los común múltiplos son divisibles entre el número que los genera.

$$\frac{10}{2} = 5 \qquad \frac{10}{5} = 2 \qquad \frac{20}{2} = 10 \qquad \frac{20}{5} = 4$$

Vamos a encontrar los común múltiplos de: 4, 6 y 9. Los tres números son no primos.

Multiplicamos los números por 2, 3, 4, 5, etc.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 4 son:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
Los múltiplos de 6 son:	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
Los múltiplos de 9 son:	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

El común múltiplo de: 4, 6 y 9 es 36.

Los común múltiplos de: 4 y 6 son 12 y 36.

Los común múltiplos de: 6 y 9 son 36 y 54.

Los común múltiplos los creamos multiplicando un número por otros números, por lo tanto, 36 se divide en forma exacta entre: 4, 6 y 9.

$$\frac{36}{4} = 9 \qquad \frac{36}{6} = 6 \qquad \frac{36}{9} = 4$$

Encontrar los común múltiplos de varios números siguiendo esta forma, puede resultar ser muy laborioso y tardado, ya que primero debemos encontrar los múltiplos de los números y después identificar aquellos que son comunes.

De los común múltiplos que hemos encontrado nos damos cuenta que hay uno que es el número más pequeño, a ese le llamamos el mínimo común múltiplo, el cual identificamos con las siglas: mcm.

El mínimo común múltiplo

Los común múltiplos de 2 y 3 que hemos localizado son: 6, 12 y 18.

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30

El común múltiplo más pequeño.

El más pequeño de los tres es 6, por lo tanto el *mínimo* común múltiplo de 2 y 3 es 6.

Desarrollo de una estrategia para encontrar el mínimo común múltiplo

Cuando un número lo multiplicamos por otros números, obtenemos múltiplos de ese número.

Vamos a aplicar el concepto de los *factores* primos para crear una estrategia que nos permita conocer el *mínimo* común múltiplo de manera más sencilla.

Los común múltiplos de 4, 6 y 9 son:

4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90

El común múltiplo más pequeño.

Los factores primos de 4, 6 y 9 son:

$$4 = 2 \times 2 \qquad 6 = 2 \times 3 \qquad 9 = 3 \times 3$$

Si tomamos el *mínimo* número de los *factores* primos que son comunes a 4, 6 y 9, creamos un común múltiplo que es el *mínimo*.

$$4 = 2 \times 2 \qquad 6 = 2 \times 3 \qquad 9 = 3 \times 3$$

El *mínimo* número de *factores* primos que son comunes a 4, 6 y 9.

El mínimo común múltiplo de 4, 6 y 9 es:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$$

Para desarrollar nuestra estrategia para encontrar el *mínimo* común múltiplo utilizando los *factores* primos vamos hacer otro ejemplo.

Primero vamos a calcular los múltiplos de 8, 12 y 18.

		×2	×3	×4	×5	×6	×7	×8	×9	×10
Los múltiplos de 8 son:	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
Los múltiplos de 12 son:	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120
Los múltiplos de 18 son:	18	36	54	72	90	108	126	144	162	180

El común múltiplo más pequeño.

Los *factores* primos de 8, 12 y 18 son:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

Si tomamos el *mínimo* número de los *factores* primos que son comunes a 8, 12 y 18, creamos un común múltiplo que es el *mínimo*.

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 12 = 2 \times 2 \times 3 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

El *mínimo* número de *factores* primos que son comunes a 8, 12 y 18.

El mínimo común múltiplo de 8, 12 y 18 es:

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

Observando con detenimiento los ejemplos anteriores, nos damos cuenta que con el *mínimo* número de *factores* primos comunes que hemos escogido podemos construir los tres números.

$$12 = 2 \times 2 \times 3$$

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 \qquad 18 = 2 \times 3 \times 3$$

Algoritmo para encontrar el mínimo común múltiplo

Resulta sencillo crear un algoritmo para encontrar el mínimo común múltiple.

1. Descomponer los *números* en sus *factores* primos.
2. Si alguno de los *factores* primos se repite en el mismo *número*, se cuenta cuántas veces se repite.
3. De los *factores* primos que se repiten en el mismo *número*, se escoge el grupo que se repite más veces.
4. De los *factores* primos que no se repiten en el mismo *número*, se elije un representante de cada uno de ellos.
5. El mínimo común múltiplo –*mcm*– es el producto de los *factores* primos seleccionados.

Para practicar el algoritmo que hemos creado, vamos a calcular el mínimo común múltiplo de: 9, 15, 60, 90.

1. Descomponer los *números* en sus *factores* primos.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2. Si alguno de los *factores* primos se repite en el mismo *número* se cuenta cuántas veces se repite.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \text{2 veces.}$$

3. De los *factores* primos que se repiten en el mismo *número* se escoge el grupo que se repite más veces.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \boxed{\text{2 veces.}} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \boxed{\text{2 veces.}} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \text{2 veces.}$$

4. De los *factores* primos que no se repiten en el mismo *número*, se elije un representante de cada uno de ellos.

$$\begin{array}{r|l} 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 15 & 3 \\ 5 & \boxed{5} \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}\ \text{2 veces.}$$

5. El mínimo común múltiplo –*mcm*– es el producto de los *factores* primos seleccionados.

$$\text{mcm} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$$

Conclusión de la dinámica de los números naturales

Los nueve dígitos los hemos clasificado en tres categorías: el 1 que podemos considerar el *origen* de todos los números cuando lo combinamos con la operación *suma*; el 2, 3, 5 y 7 que llamamos primos o primarios, ya que solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*; el 4, 6, 8 y 9 que llamamos no primos y pueden ser creados utilizando los dígitos primos y la operación *multiplicación*.

Siguiendo la dinámica de los nueve dígitos, todos los números naturales los hemos clasificado en dos categorías: primos o primarios, ya que solamente pueden ser creados utilizando el dígito 1 y la operación *suma*; no primos aquellos que pueden crearse con los números primos y la operación *multiplicación*.

De esta clasificación de los números naturales en primos o primarios y en no primos pudimos enunciar el *Teorema Fundamental de la Aritmética*.

Una vez que hemos entendido y demostrado estos conceptos, los aplicamos para descomponer números en sus *factores* primos y establecer criterios para la divisibilidad de los números.

Estudiamos el concepto de los *múltiplos* de un número y de los *común múltiplos* de varios números.

Utilizando los conceptos de los *factores* primos o primarios y del *común múltiplo* creamos un algoritmo para encontrar en forma sencilla, lógica y ordenada el mínimo común múltiplo –*mcm*–.

Dinámica de los Números Fraccionarios

Primero al Quinto Niveles de Abstracción

Introducción

Utilizando los nueve dígitos y las operaciones *suma* y *multiplicación* –*Teorema Fundamental de la Aritmética*– hemos construido los números *naturales*, ahora vamos a utilizar la operación *división* para crear los números *fraccionarios*.

Concepto de fracción

Una fracción consiste en dividir –fraccionar– una unidad en partes iguales en tamaño y forma.

Concepto de unidad

En el *primero* y *segundo* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica.

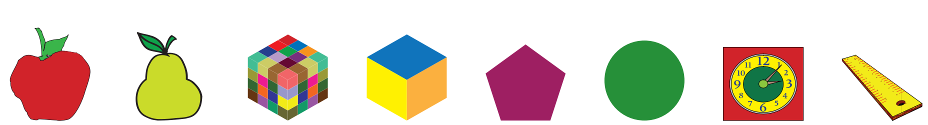
En el *tercero* y *cuarto* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica y una unidad de medición: tiempo, distancia, área y volumen.

En el *quinto* nivel de abstracción estudiamos que la *unidad* de una fracción puede ser *simple* o *compuesta*.

Unidad simple

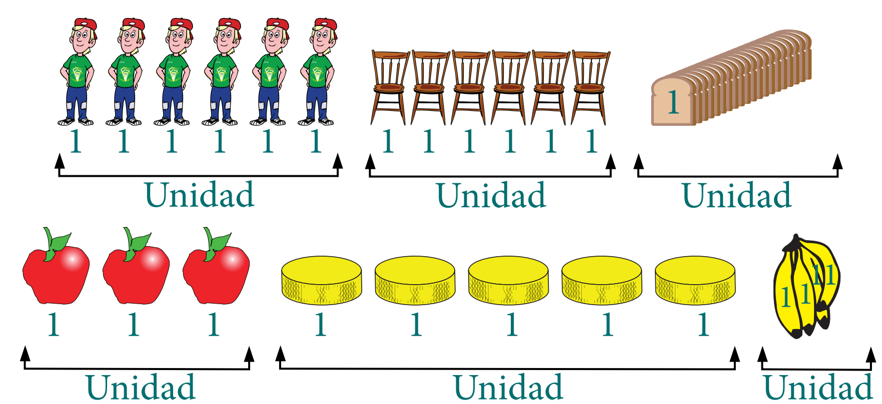
La unidad de una fracción es *simple* cuando el número que fraccionamos es 1, 1 objeto, 1 figura geométrica o 1 unidad de medición.

Del *primero* al *cuarto* niveles de abstracción hemos utilizado únicamente *unidades simples*.

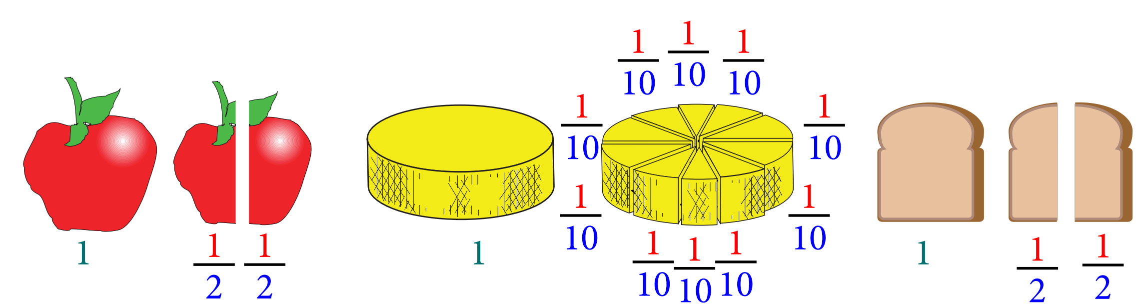


Unidad compuesta

La unidad de una fracción es *compuesta* cuando el *número* o el *conjunto* de objetos que fraccionamos es *mayor* a 1.



Cada uno de los elementos de la *unidad compuesta* puede también ser dividido en fracciones.



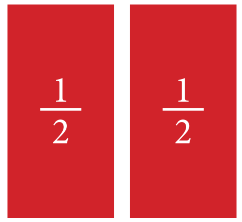
Una vez que dividimos en fracciones los elementos de la *unidad compuesta*, cada uno de los elementos es una *unidad simple*.

Por esta razón un problema en el que la *unidad* es *compuesta* y a su vez sus elementos están divididos en fracciones, en este problema se combinan la *unidad compuesta* con una *unidad simple* repetida varias.

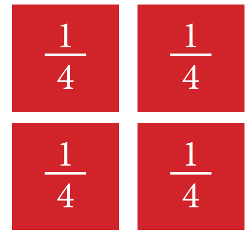
Notación de fracción

Para explicar claramente el valor de una fracción necesitamos dos términos: un término que especifique en cuántas partes hemos dividido la unidad –*denominador*– y otro término que especifique cuántas fracciones o partes de ese total hemos tomado –*numerador*–.

Unidad



2 Fracciones

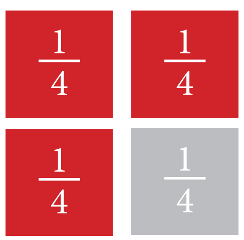


4 Fracciones

Numerador. → 1 ← 1 Fracción.
Denominador. → 2 ← De 2 fracciones.

1 ← 1 Fracción.
4 ← De 4 fracciones.

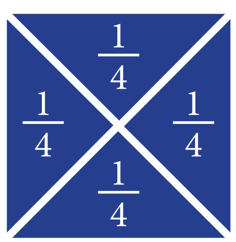
Numerador. → 1 ← Especifica cuántas partes del total de partes hemos tomado.
Denominador. → 2 ← Especifica en cuántas partes hemos dividido la unidad.



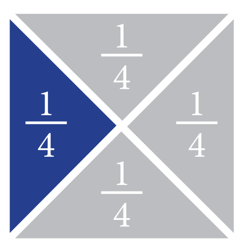
3 ← Cuántas partes del total de partes hemos tomado.
4 ← En cuántas partes hemos dividido la unidad.

Las fracciones tienen que ser del mismo tamaño y forma.

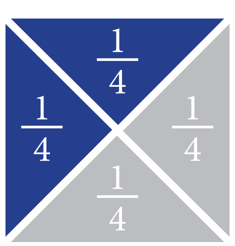
Unidad



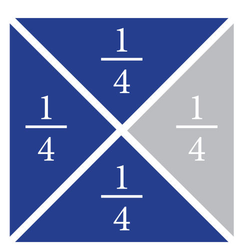
4 Fracciones



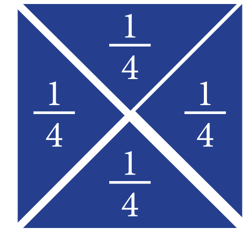
1 ← 1 Fracción.
4 ← De 4 fracciones.



2 ← 2 Fracciones.
4 ← De 4 fracciones.



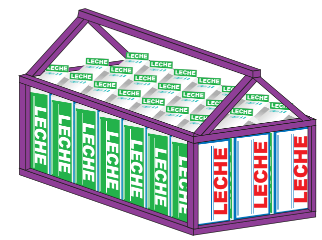
3 ← 3 Fracciones.
4 ← De 4 fracciones.



4 Fracciones. → 4
De 4 fracciones. → 4 = 1 ← Unidad.

Notación de fracción cuando la unidad es compuesta

Si la unidad es *compuesta*, debemos claramente especificar en cuántas partes la dividimos y de ese total de partes cuántas partes tomamos.



Unidad

Unidad = 21 litros de leche.

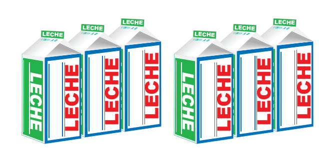
Dividimos la unidad en siete partes del mismo tamaño.

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$

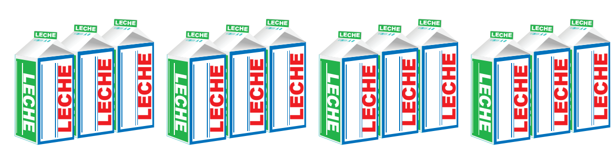
1 ← 1 Fracción.
7 ← De 7 fracciones.

Unidad = 21 litros de leche.

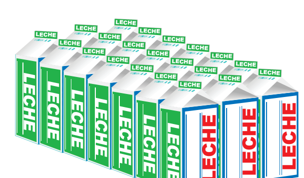
$\frac{1}{7}$ = 3 litros de leche.



$\frac{2}{7}$ = 6 litros de leche.



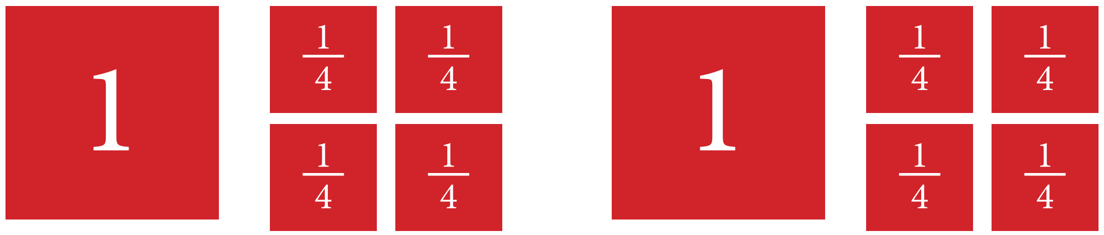
$\frac{4}{7}$ = 12 litros de leche.



$\frac{7}{7}$ = 1 Unidad = 21 litros de leche.

Unidad simple repetida varias veces

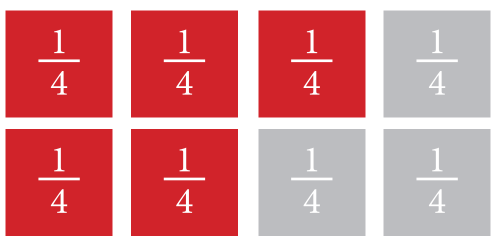
La misma *unidad*, *repetida* varias veces, podemos dividirla o fraccionarla en partes iguales y tomar fracciones que comprendan más de una unidad.



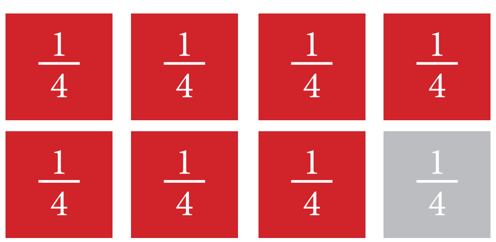
Unidad **4 Fracciones** **Unidad** **4 Fracciones**

1 Unidad $= \frac{4}{4}$

2 Unidades $= \frac{8}{4}$ ← 8 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

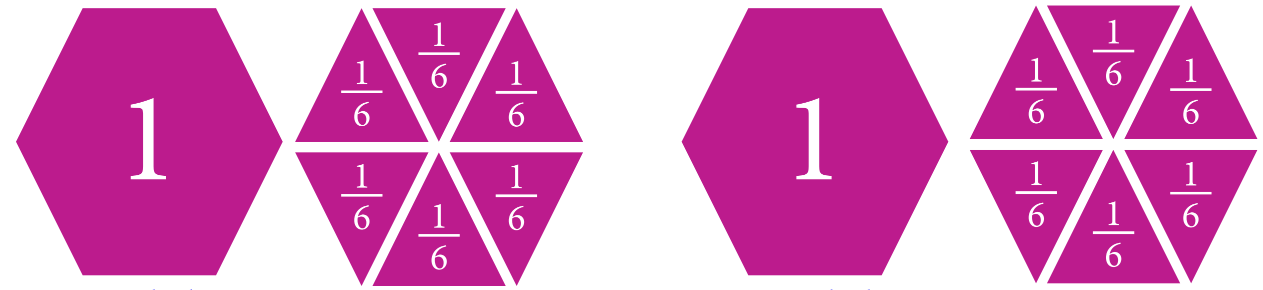


$\frac{5}{4}$ ← 5 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

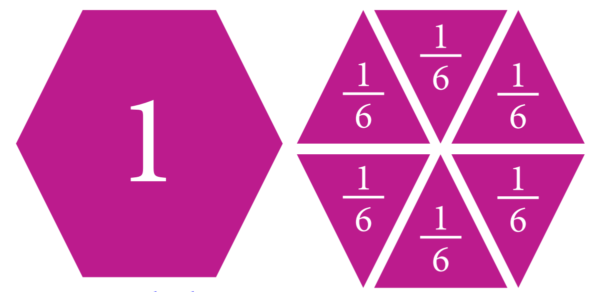


$\frac{7}{4}$ ← 7 Fracciones. ← De 4 fracciones de cada unidad.

Es muy importante *no confundir* fracciones de una *unidad compuesta* y fracciones de una *unidad repetida* varias veces.



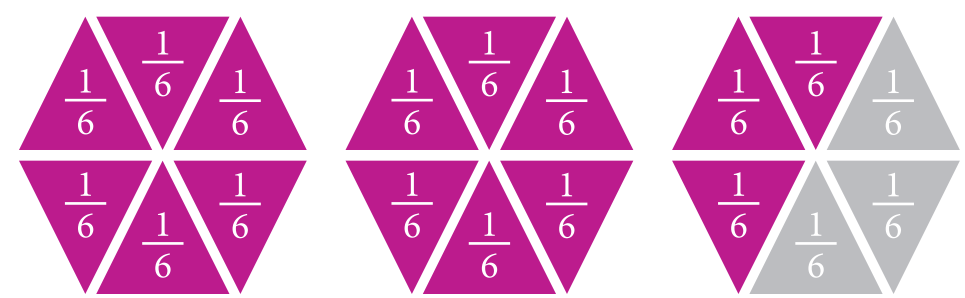
Unidad **Unidad**



Unidad

1 Unidad $= \frac{6}{6}$

3 Unidades $= \frac{18}{6}$ ← 18 Fracciones. ← De 6 fracciones de cada unidad.



$\frac{15}{6}$ ← 15 Fracciones. ← De 6 fracciones de cada unidad.

Fracciones impropias

Cuando en una fracción el numerador es *mayor* que el denominador sabemos que la fracción procede de una *unidad repetida* varias veces.

Cuando el *numerador* de una fracción es *mayor* que el denominador, a la fracción le llamamos *fracción impropia*.

$\frac{18}{6}$ ← Mayor que el denominador. → $\frac{15}{6}$

Fracciones impropias.

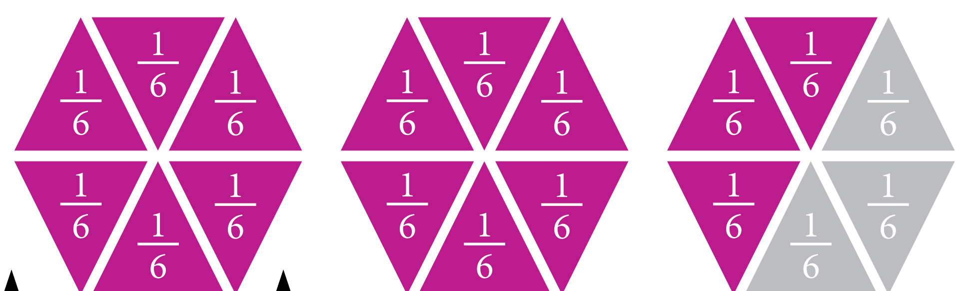
Como sabemos que una fracción *impropia* procede de una *unidad repetida* varias veces, podemos determinar de *cuántas* unidades procede.

El *denominador* indica el número de fracciones en las cuales la *unidad* está dividida.

$\frac{15}{6}$

6 ← Cada una de las unidades está dividida en 6 fracciones.

15 → El numerador indica cuántas fracciones hemos tomado.



$\frac{6}{6} = 1$ ← Unidad.

$\frac{12}{6} = 2$ ← Unidades.

$\frac{15}{6}$

Descomponemos el numerador en las unidades que podemos formar de acuerdo a lo que indica el denominador.

$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

2 Unidades.

Fracciones impropias en notación mixta

La fracción impropia la podemos expresar como la suma de un número entero más una fracción *no impropia*, es decir *propia*.

Cuando una *fracción impropia* la expresamos como la *suma* de un *número entero* y una *fracción propia* le llamamos *notación mixta*.

Le llamamos notación *mixta* porque hemos mezclado un número *entero* con una *fracción*.

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

Entero. Fracción.

En matemáticas nos gusta escribir las expresiones en la forma más compacta posible, por eso no escribimos el signo más, pero sabemos que es una suma.

$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6}$$

Utilizando el concepto de fracciones equivalentes, simplificamos la fracción.

Dividimos entre 3.

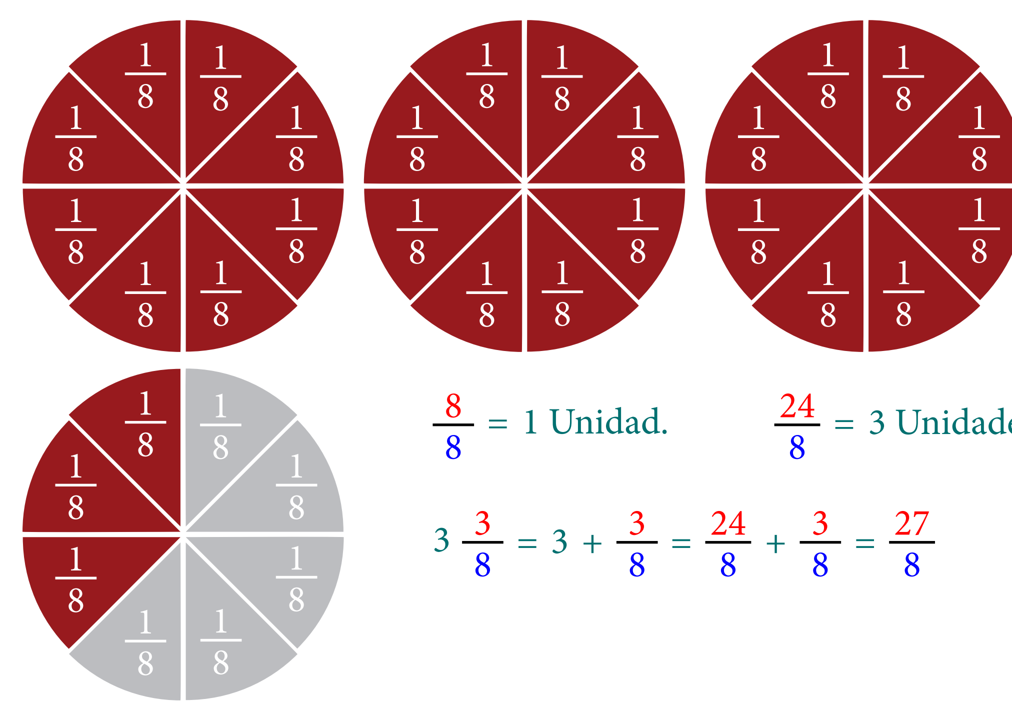
$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6} = 2\,\frac{1}{2}$$

Cuando una *fracción impropia* está expresada en notación mixta, podemos convertirla en notación de fracción haciendo el proceso inverso.

La fracción impropia en notación mixta:

$$3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$$



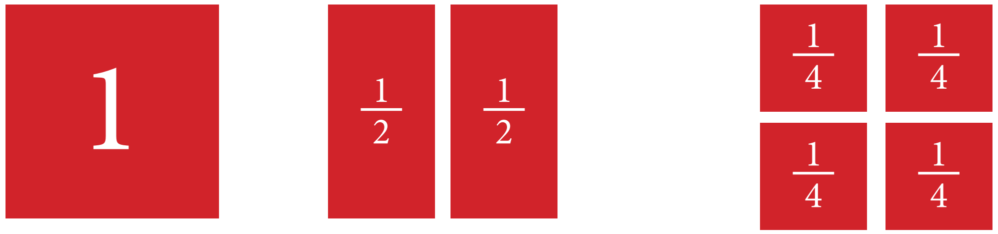
$\frac{8}{8} = 1$ Unidad.

$\frac{24}{8} = 3$ Unidades.

$$3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

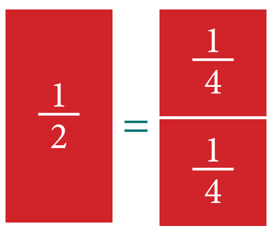
Fracciones equivalentes

Una *unidad*, podemos fraccionarla de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, en medios y en cuartos.



Unidad **2 Fracciones** **4 Fracciones**

Nos damos cuenta que *un medio* es equivalente a *dos cuartos* ya que representan exactamente la misma área.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

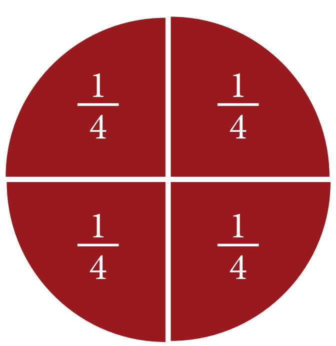
Cuando dos fracciones representan la *misma área* les llamamos fracciones *equivalentes*.

Cuando el *área* representada por *un medio* la dividimos en *dos áreas*, creamos una fracción *equivalente*.

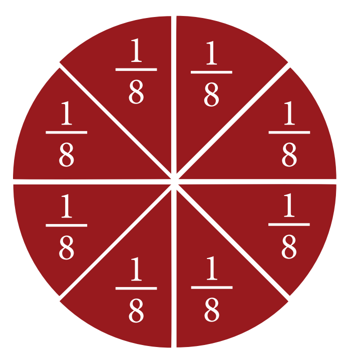
Dividir *un área* en *dos áreas* iguales es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Dividimos un círculo en *cuatro* partes iguales.

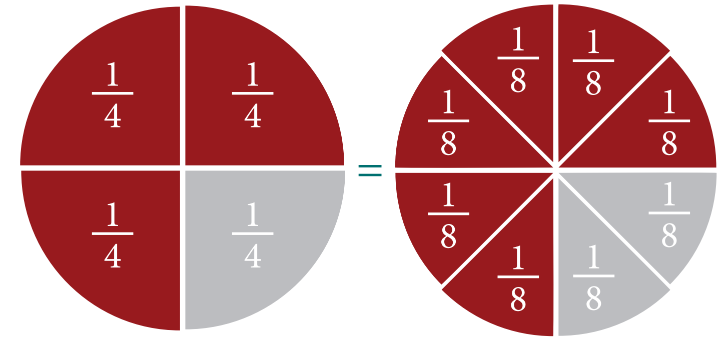


Ahora lo dividimos en *ocho* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Tomamos *tres cuartos* que es equivalente a *seis octavos.*



$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

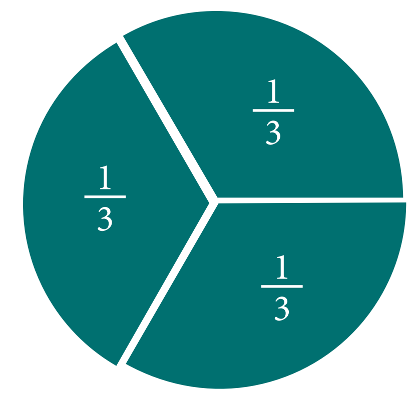
Hemos dividido *un* cuarto en *dos* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el doble de fracciones.

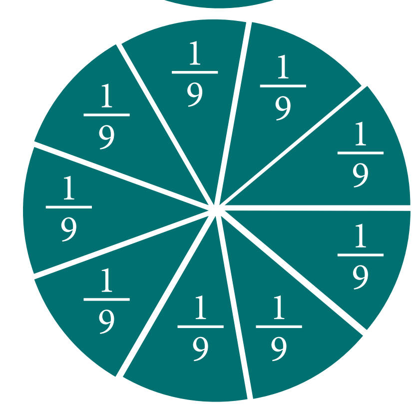
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \quad \longrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Para hacer las fracciones de la mitad de tamaño.

Dividimos un círculo en *tres* partes iguales.



Ahora lo dividimos en *nueve* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

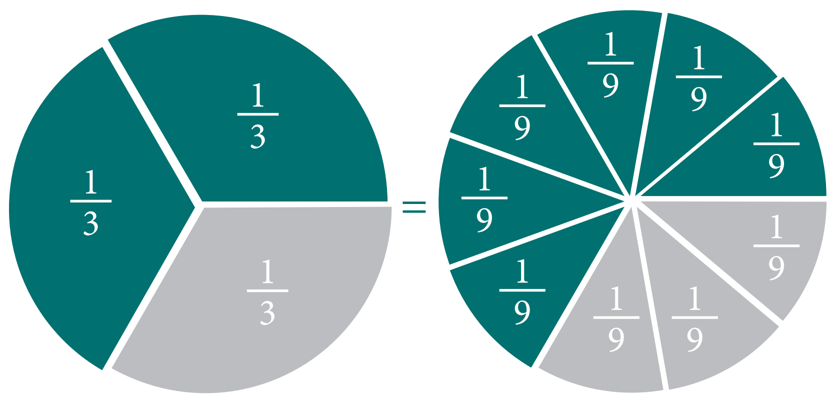
Hemos dividido *un* tercio en *tres* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *3* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el triple de fracciones.

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Para hacer las fracciones de la tercera parte de tamaño.

Tomamos *dos tercios* que es equivalente a *seis novenos*.



$\frac{2}{3}$ $\frac{6}{9}$

Fracciones equivalentes utilizando la multiplicación y división

Multiplicando el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número creamos una fracción equivalente como hemos demostrado.

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{3\times 2}{9\times 2} = \frac{6}{18} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \qquad \frac{3}{9} = \frac{3\times 3}{9\times 3} = \frac{9}{27} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

La *división* es la operación *inversa* de la *multiplicación*, por lo cual si dividimos el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número, también creamos fracciones equivalentes.

$$\frac{6/2}{18/2} = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} \qquad \frac{6/3}{18/3} = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{2}{6}$$

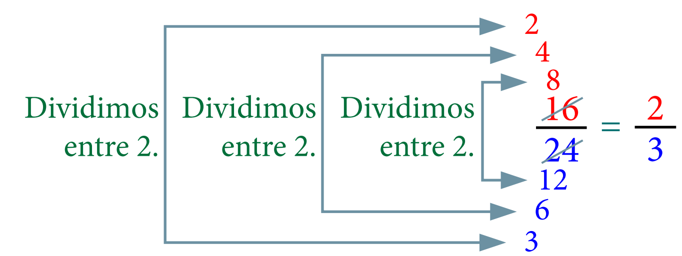
$$\frac{3/3}{9/3} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Simplificación de fracciones

Cuando creamos fracciones equivalentes dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número, simplificamos la fracción.

Para hacer más sencillo el proceso de simplificar una fracción, las divisiones las hacemos mentalmente.

Cuando una fracción puede simplificarse varias veces utilizamos el siguiente procedimiento haciendo las divisiones mentalmente.



Cada vez que dividimos el numerador y el denominador por el mismo número, creamos una fracción equivalente.

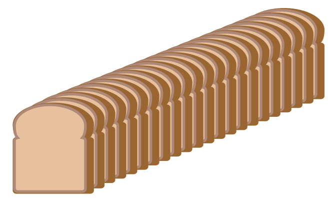
$$\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \quad \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Unidades simples y compuestas combinadas

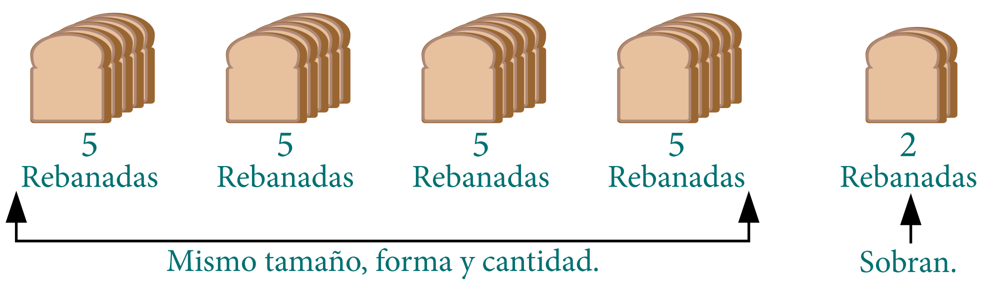
Cuando la unidad es *compuesta*, en algunas ocasiones necesitamos combinarla con una unidad *simple* repetida varias veces.

Por ejemplo, tenemos un pan que está cortado en 22 rebanadas. Queremos saber cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.

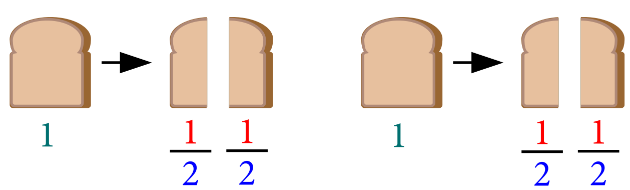


Se trata de fracciones cuya unidas es *compuesta*, ya que el pan está *compuesto* de 22 rebanas.

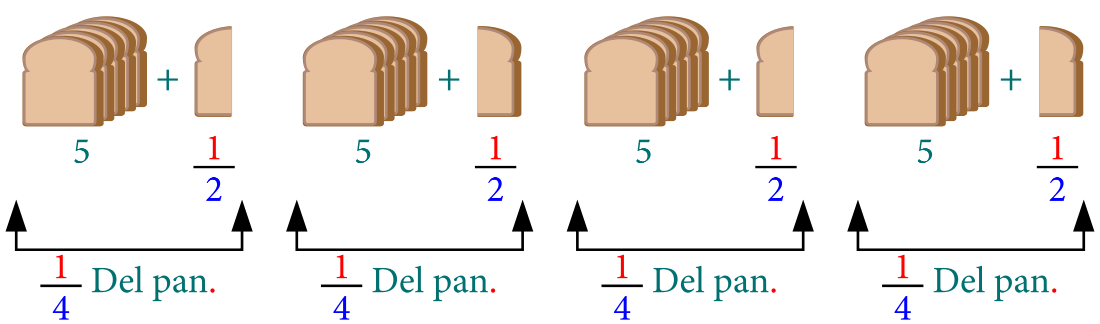
Dividimos en *cuatro* partes iguales para formar *cuartos* de la unidad.



Las *dos* rebanadas que sobran las dividimos a la *mitad*, para tener *cuatro* mitades.



Formamos *cuatro fracciones* iguales, del mismo tamaño, forma y cantidad.



Unidad compuesta. $\rightarrow \frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \leftarrow$ Rebanada.

Del pan. Rebanadas.

La rebanada de pan es una unidad simple repetida varias veces. Expresamos la fracción en notación mixta.

Entero. $\rightarrow 5 + \frac{1}{2} = 5\,\frac{1}{2}$

Fracción.

Cuando trabajamos con fracciones es muy importante que claramente especifiquemos qué es la *unidad*. Si se trata de una *unidad* simple o compuesta.

En el ejemplo anterior el *pan completo* es una *unidad compuesta*, sin embargo las *rebanadas* son *unidades simples*.

$5 + \frac{1}{2} \leftarrow$ Unidad.

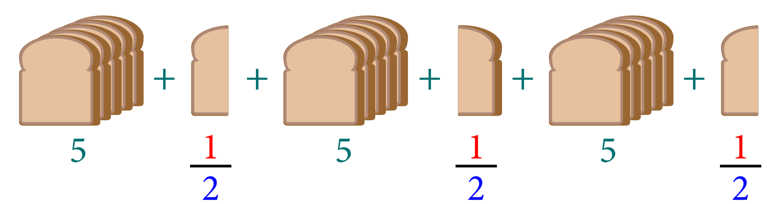
Unidades.

Por eso es posible decir que: $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \leftarrow$ Fracción de la unidad simple.

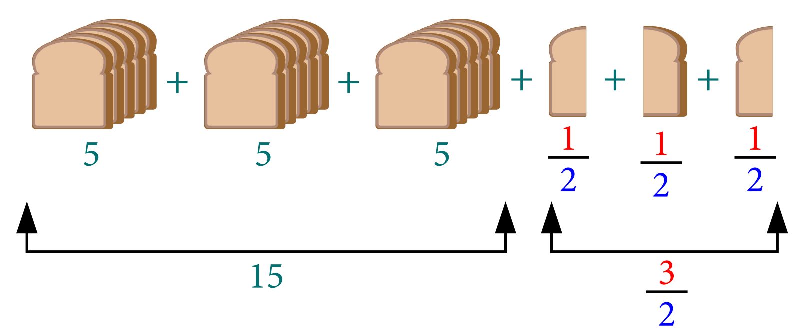
Fracción de la unidad compuesta. Unidad simple repetida varias veces.

$$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} = 5\,\frac{1}{2}$$

Ahora que ya conocemos cuántas rebanadas son *un cuarto* del pan, podemos calcular cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



Sumamos las rebanas y las mitades de rebanada.



Expresamos la fracción *impropia* en *notación mixta*. $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\,\frac{1}{2}$

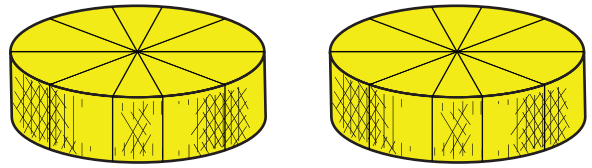
$$\frac{3}{4} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\,\frac{1}{2}$$

Del pan. Rebanadas.

Ejemplos de unidades simples y compuestas combinadas

Otros dos *ejemplos* en los cuales la unidad es *compuesta* y cada una de las partes que la componen son unidades *simples*. Hacemos la solución con dibujos y aritméticamente.

Tenemos dos quesos. Cada uno está dividido en diez rebanadas.

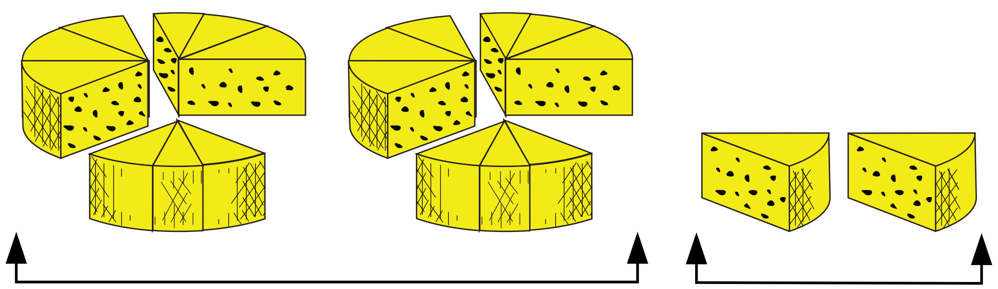


La unidad es compuesta.

Primera Pregunta.

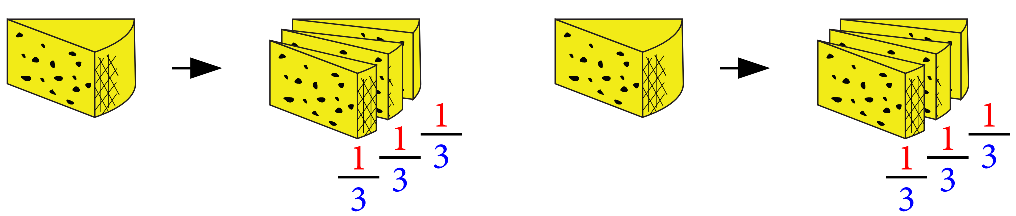
¿Cuántas rebanadas son cinco sextos?

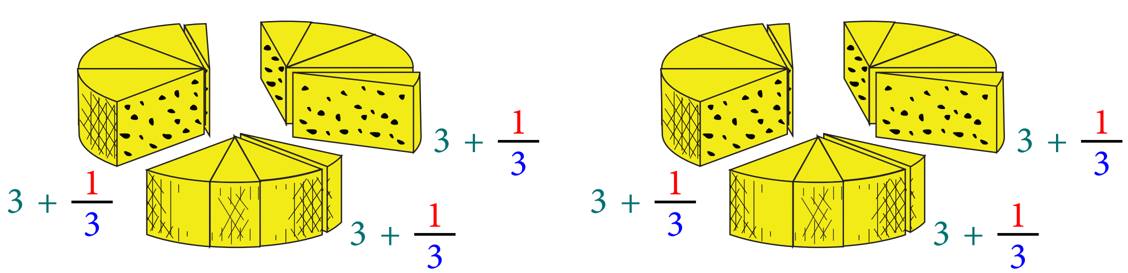
Tenemos que dividir la unidad en *seis partes iguales* en forma, tamaño y cantidad.



Mismo tamaño, forma y cantidad. Sobran 2 rebanadas.

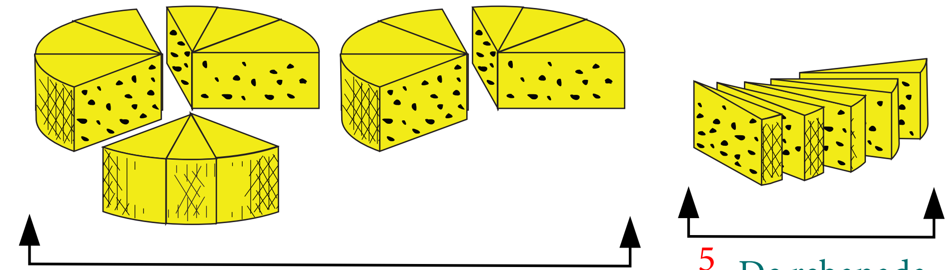
Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada.





Las *seis* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos cinco sextos del total de las fracciones.



15 rebanadas. $\frac{5}{3}$ De rebanada.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta. $\frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

Efectuamos la suma de fracciones. $15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16 + \frac{2}{3}$

Cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos es: $\frac{5}{6} = 16 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *seis*, ya que queremos formar *sextos* de la unidad compuesta.

$$6\,\overline{)\,20}\;=3,\quad 20 - 18 = 2 \;\rightarrow\; \frac{1}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

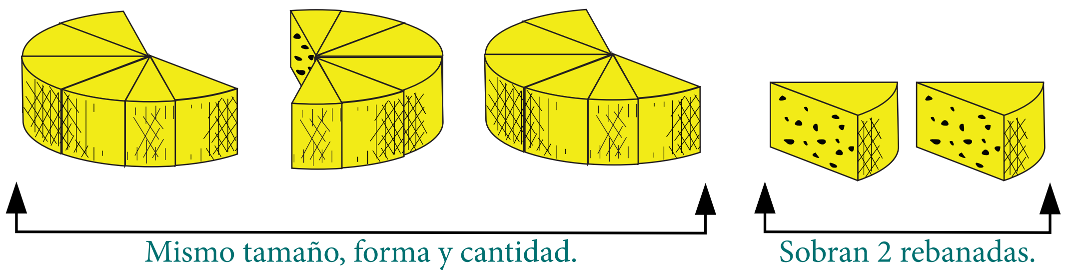
Tomamos cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos. $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 5}{3} = 15 + \frac{5}{3}$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma. $\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$

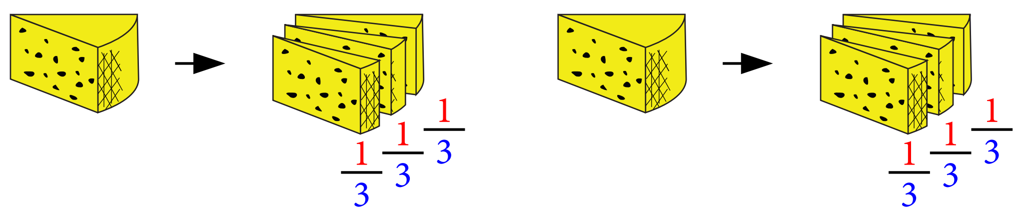
Segunda Pregunta.

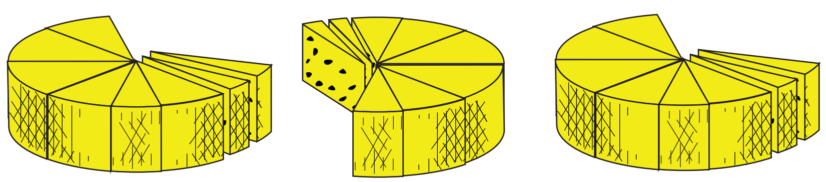
¿Cuántas rebanadas son dos tercios?

Tenemos que dividir la unidad en *tres* partes iguales en forma, tamaño y cantidad.



Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada y los distribuimos en las tres fracciones.

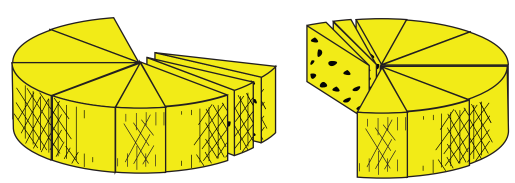




$6 + \frac{2}{3}$ $\quad$ $6 + \frac{2}{3}$ $\quad$ $6 + \frac{2}{3}$

Las *tres* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos dos tercios del total de las fracciones.



$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta. $\frac{4}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$

Efectuamos la suma de fracciones. $12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}$

Dos tercios del total de las rebanadas de los quesos es: $\frac{2}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *tres*, ya que queremos formar *tercios* de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 3 & 20 \\ & -18 \\ & 2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

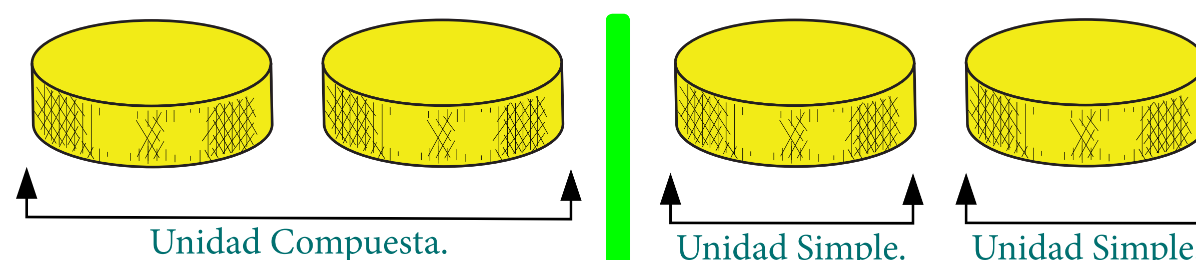
Tomamos dos tercios del total de las rebanadas de los quesos. $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 6 + \frac{4}{3}$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma. $\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$

Comparación de Unidades Simples Repetidas Varias Veces y Unidades Compuestas

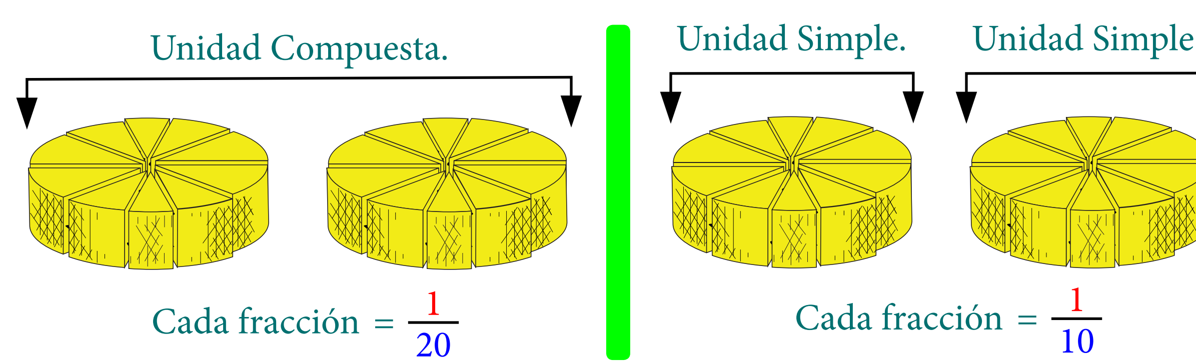
Como hemos visto es muy importante definir claramente la *unidad* antes de hacer las fracciones. De la forma como la *unidad* está definida dependen las fracciones.

Por ejemplo, tenemos *dos quesos*. En el primer caso los dos quesos forman *una unidad compuesta*, y en el segundo caso *cada queso* es *una unidad simple*, es decir, la unidad simple repetida dos veces.



Dividimos cada uno de los quesos en diez partes iguales.

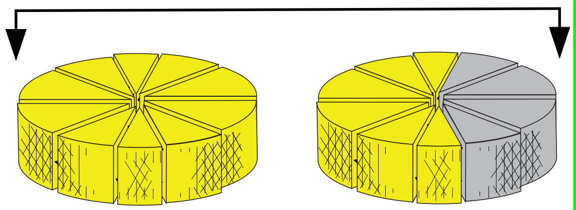
En la unidad *compuesta* cada una de las fracciones es *una* de *veinte*, mientras que en la unidad *simple* repetida dos veces cada una de las fracciones es *una* de *diez*.



En ambos casos queremos conocer que fracción de la unidad es *cuatro quintos*.

En ambos casos *cuatro quintos* representa el *mismo número de rebanadas*, sin embargo *no la misma fracción*, ya que en el primer caso ambos quesos son la unidad y en el segundo caso cada uno de los quesos es una unidad que está repetida.

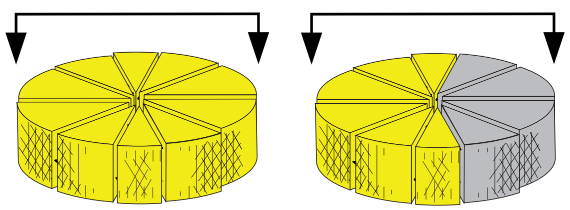
Unidad Compuesta.



Cada fracción $= \dfrac{1}{20}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Unidad Simple. Unidad Simple.



Cada fracción $= \dfrac{1}{10}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{10} = \frac{10+6}{10} = \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = 1\frac{6}{10}$$

Números racionales

Un número fraccionarios o fracción es la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$\dfrac{2}{5}$ ← Esta fracción contiene 2 partes, ← De un total de 5 partes.

Relación significa lo mismo que la palabra razón, por eso a las fracciones también les llamamos números racionales.

Un número racional expresa la razón o relación que el numerador tiene con el denominador.

Todos los números naturales son racionales, ya que sí podemos expresarlos como la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{9}{1} \quad \frac{14}{1} \quad \frac{23}{1} \quad \frac{48}{1} \quad \frac{75}{1} \quad \frac{92}{1} \quad \frac{349}{1} \quad \frac{785}{1} \quad \frac{826}{1}$$

Números irracionales

Cuando un número no es posible expresarlo como la relación o razón del numerador y el denominador, le llamamos *irracional*.

Se llaman *irracionales* por *no* tener una *razón –relación–* entre el numerador y el denominador.

El número irracional más famoso es el número π.

El Conjunto de los Números Reales Positivos

Sexto Nivel de Abstracción

Clasificación de los números

1. **Dígitos**
   1. **Uno:** 1.

      Utilizando la operación suma genera todos los dígitos.
   2. **Primos o primarios:** 2, 3, 5, 7.

      Solamente pueden ser creados utilizando el dígito **1** y la operación suma.
   3. **No primos o no primarios:** **4**, **6**, **8**, **9**.

      Pueden ser creados utilizando los dígitos primos 2 y 3 y la operación multiplicación.
   4. **Cero:** **0**.

      Representa que no hay objeto y la columna numérica está vacía.
2. **Números naturales**
   1. **Primos o primarios:** 11, 13, 17, 19, ...

      Solamente pueden ser creados utilizando el dígito **1** y la operación suma.
   2. **No primos o no primarios:** **10**, **12**, **14**, **15**, ...

      Pueden ser creados utilizando los dígitos primos y la operación multiplicación.
3. **Números enteros**

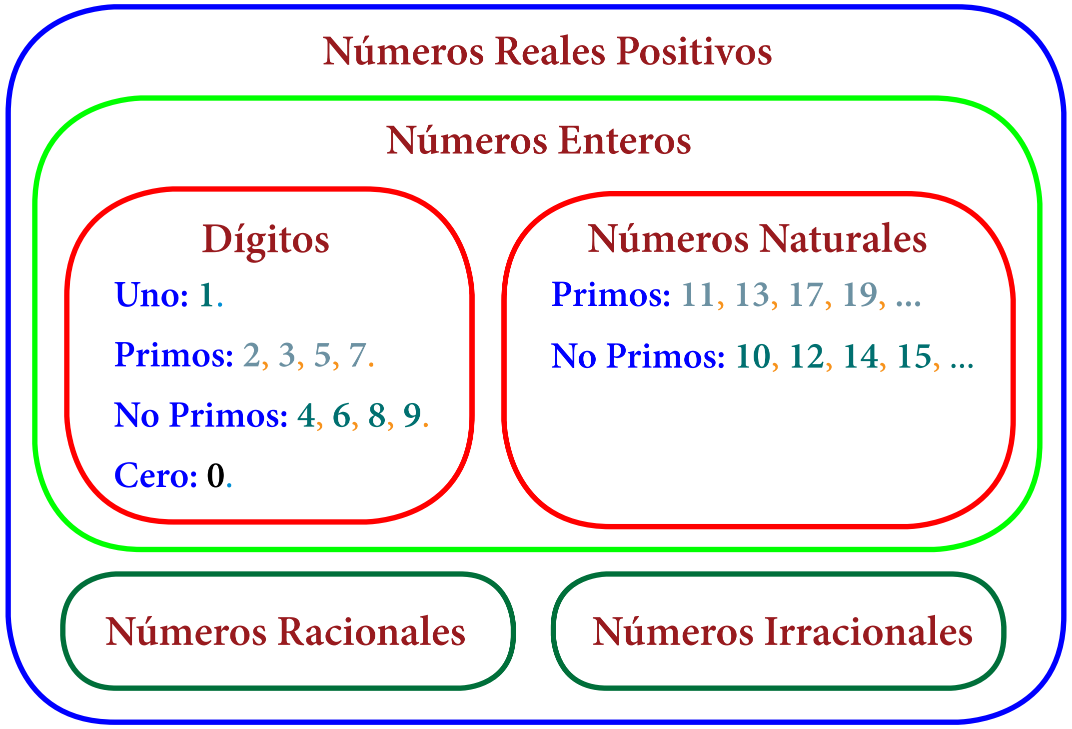
   A todos los dígitos y a números naturales les llamamos enteros.
4. **Números racionales o fraccionarios**

   Son la división de dos números enteros, excepto el cero, que expresan la razón o relación entre el numerador y el denominador.
5. **Números irracionales**

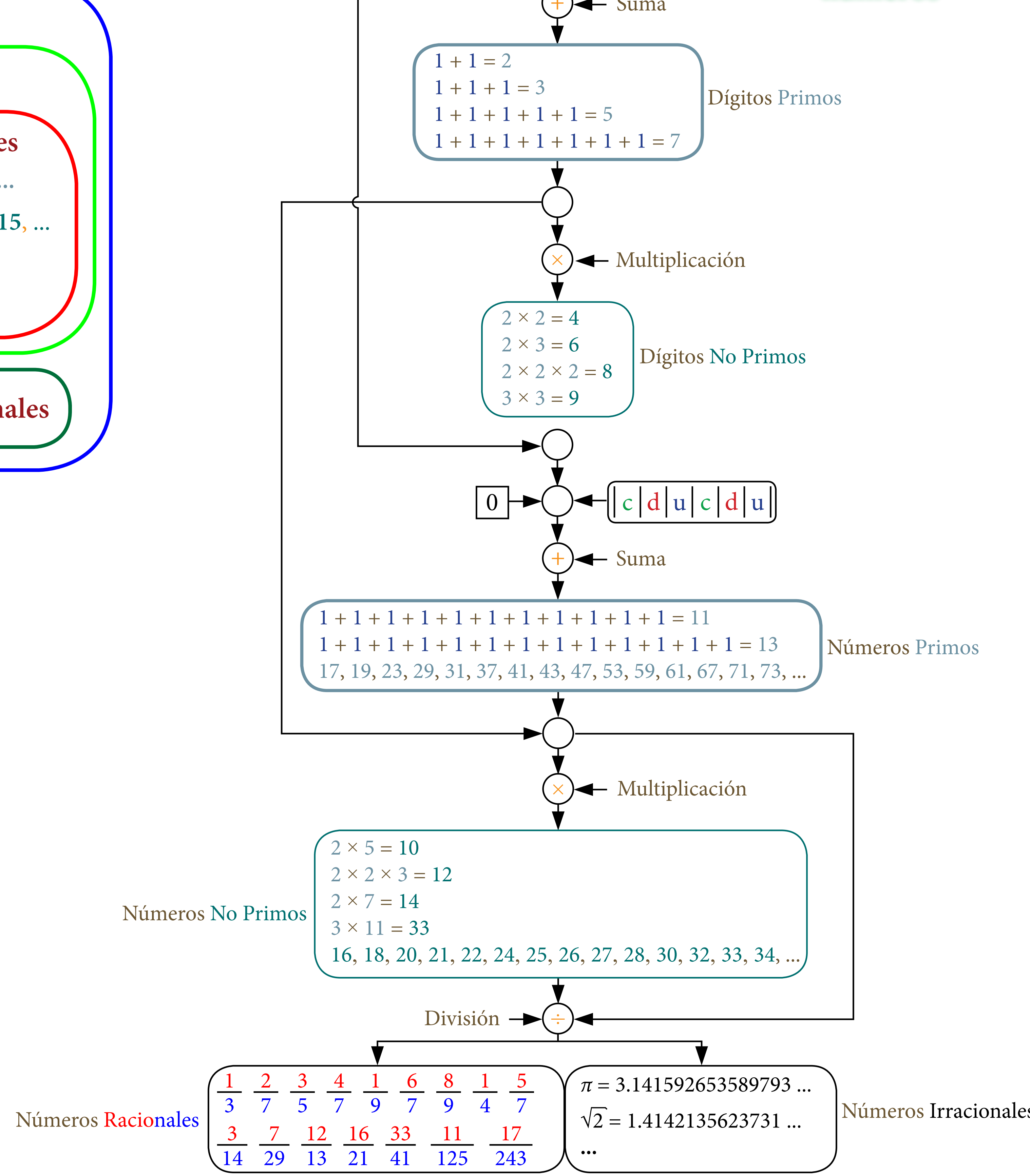
   No pueden ser expresados como la razón o relación entre el numerador y el denominador. Solamente pueden ser expresados como número decimal.
6. **Números reales positivos**

   El conjunto de los números enteros, racionales e irracionales.

Clasificación de los números en conjuntos



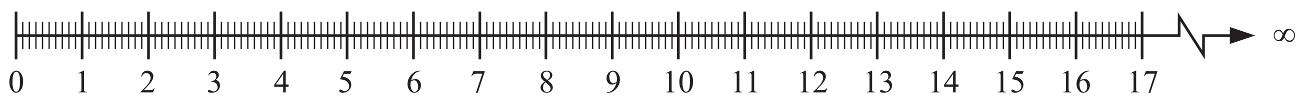
Árbol genealógico de los números



La recta de los números reales positivos

La recta de los números reales positivos, empieza en cero y crece sin límite, es decir, podemos seguir añadiendo números y nunca terminar. En lenguaje matemático, decimos que tiende a infinito.

En matemáticas, tender, es decir, caminar hacia un número sin nunca alcanzarlo, se representa con una flecha. Infinito se representa con un símbolo que parece un 8 acostado ∞. Tender a infinito se representa como: $\to \infty$.



Capítulo 3

Operaciones Básicas
Suma y Resta

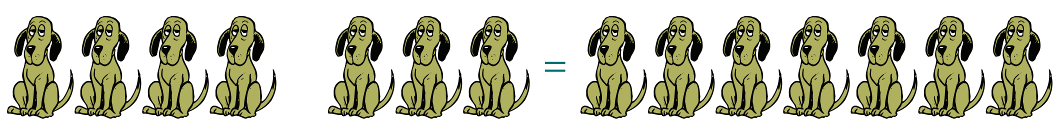
Sumas y Restas Hasta 9

Primer Nivel de Abstracción

Sumas utilizando objetos y el símbolo del número

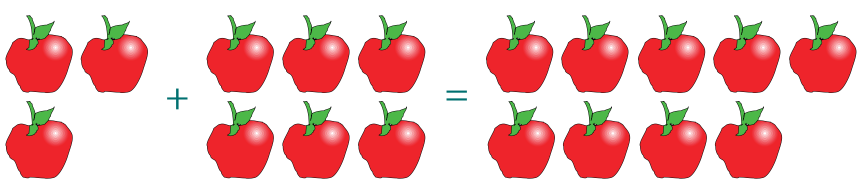
Efectuamos la suma en forma horizontal

Agrupamos los objetos en conjuntos y sumamos los conjuntos.



4 + 3 = 7

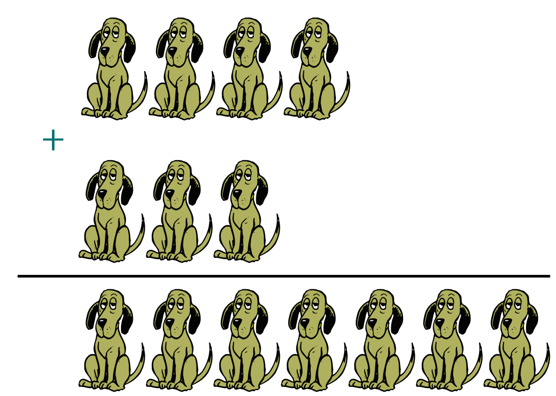
4 + 3 = 7



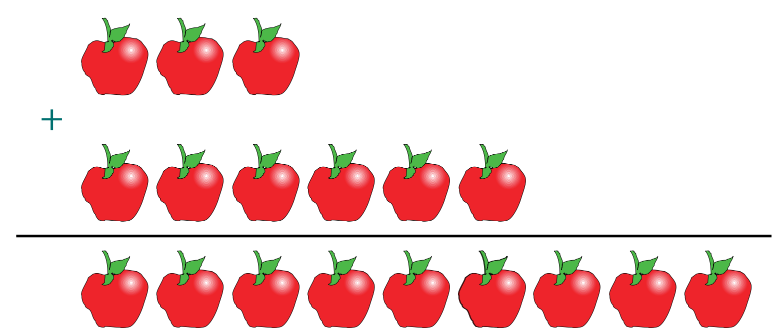
3 + 6 = 9

3 + 6 = 9

Efectuamos la suma en forma vertical



$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ \ 3 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

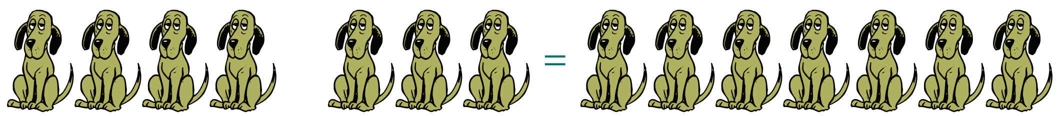


$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ \ 6 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$$

Sumas utilizando objetos y el símbolo del número

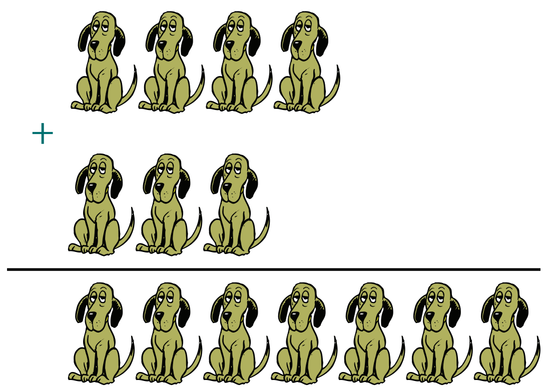
Efectuamos la suma en forma vertical

Agrupamos los objetos en conjuntos y sumamos los conjuntos.

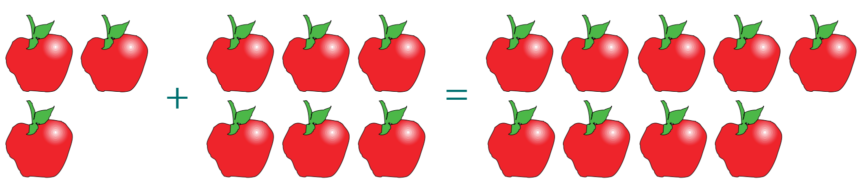


4 + 3 = 7

$4 + 3 = 7$

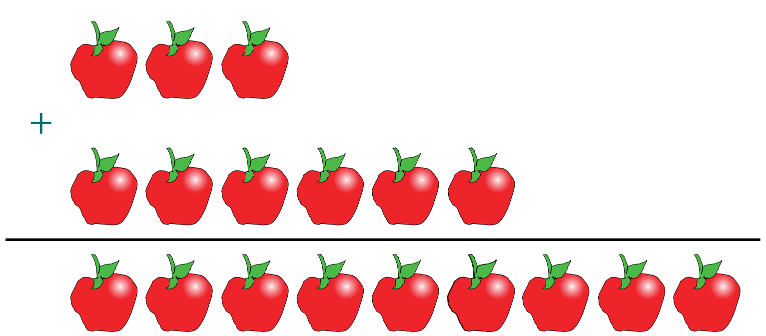


$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 3 \\ \hline 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4 \\ +\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$$



3 + 6 = 9

$3 + 6 = 9$

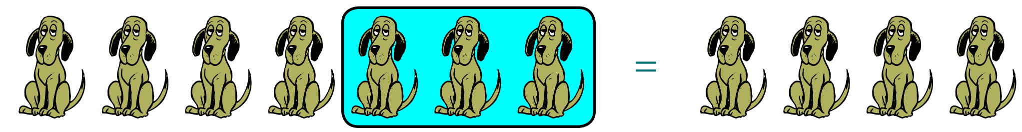


$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 6 \\ \hline 9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +\ 6 \\ \hline 9 \end{array}$$

Restas utilizando objetos y el símbolo del número

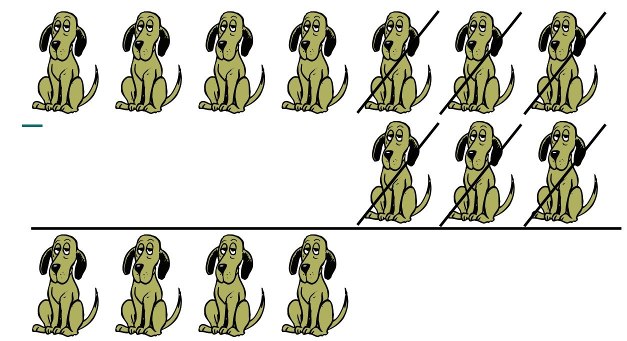
Efectuamos la restas en forma horizontal

A un conjunto le quitamos –restamos– otro conjunto.

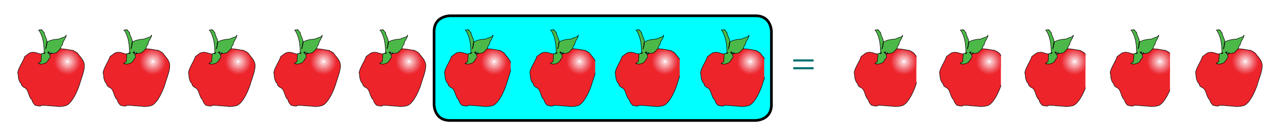


7 – 3 = 4

$7 - 3 = 4$

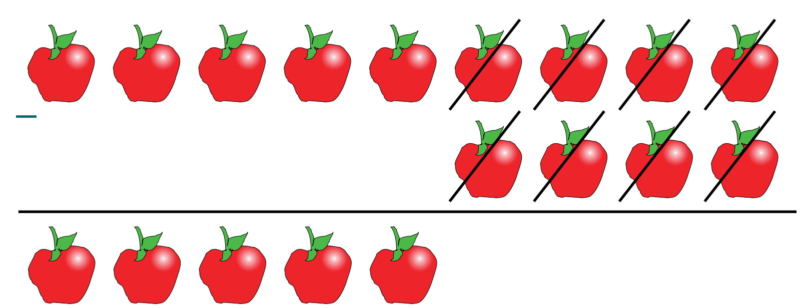


$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 3 \\ \hline 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7 \\ -\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$



9 – 4 = 5

$9 - 4 = 5$



$$\begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ -\ 4 \\ \hline 5 \end{array}$$

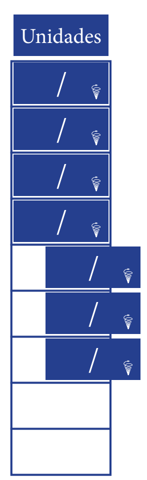
Sumas hasta 9 utilizando las columnas numéricas

Las fichas de las columnas numéricas son equivalentes a los objetos que hemos sumado y restado.

Al incluir las columnas numéricas, empezamos el proceso de formar imágenes simbólicas en la mente. Ya no son objetos lo que el estudiante imagina sino símbolos.

Es muy importante que el alumno utilizando sus sentidos, manipule las columnas numéricas y las fichas para que forme imágenes en la mente; y los números se vuelvan parte de su realidad cognoscitiva.

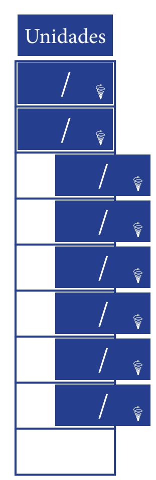
Efectuamos la suma en forma horizontal y vertical



$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 3 \\ \hline 7 \end{array}$$

7

4 + 3 = 7



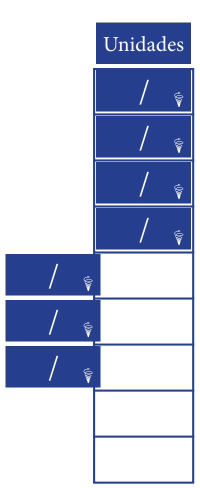
$$\begin{array}{r} 2 \\ +\ 6 \\ \hline 8 \end{array}$$

8

2 + 6 = 8

Restas hasta 9 utilizando las columnas numéricas

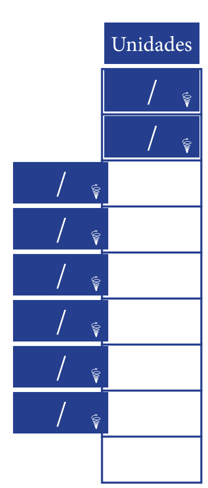
Efectuamos la resta en forma horizontal y vertical



$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 3 \\ \hline 4 \end{array}$$

4

7 – 3 = 4



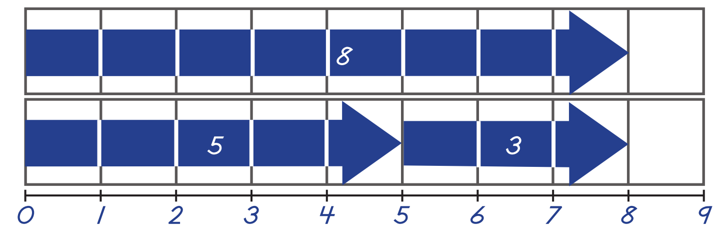
$$\begin{array}{r} 8 \\ -\ 6 \\ \hline 2 \end{array}$$

8

8 – 6 = 2

Sumas hasta 9 utilizando la recta de los números

Efectuamos la suma en forma horizontal y vertical

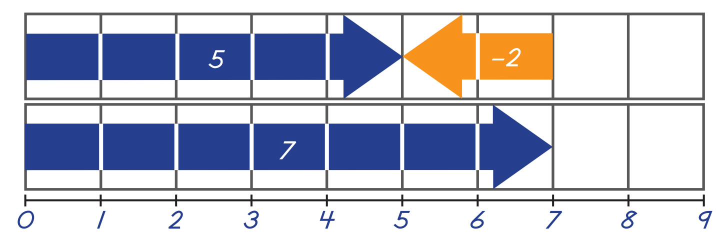


$$\begin{array}{r} 5 \\ +\ 3 \\ \hline 8 \end{array}$$

5 + 3 = 8

Restas utilizando la recta de los números

Efectuamos la resta en forma horizontal y vertical



$$\begin{array}{r} 7 \\ -\ 2 \\ \hline 5 \end{array}$$

7 – 2 = 5

Número escondido en la suma y resta

Columna de las unidades

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ \boxed{} \\ \hline 9 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ +\ \boxed{6} \\ \hline 9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 7 \\ -\ \boxed{} \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ -\ \boxed{2} \\ \hline 5 \end{array}$$

Sumas y restas hasta 9 utilizando las columnas numéricas

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{r} 5\,2 \\ +\ 3\,7 \\ \hline 8\,9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 6\,5 \\ -\ 2\,3 \\ \hline 4\,2 \end{array}$$

Sumas hasta 9 en notación desarrollada y notación compacta

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{l} \ 2\,3 = 2\,0 + 3 \\ +\ 4\,6 = 4\,0 + 6 \\ \hline \ 6\,0 + 9 = 6\,9 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5\,2 \\ +\ 3\,5 \\ \hline 8\,7 \end{array}$$

Restas hasta 9 en notación desarrollada y notación compacta

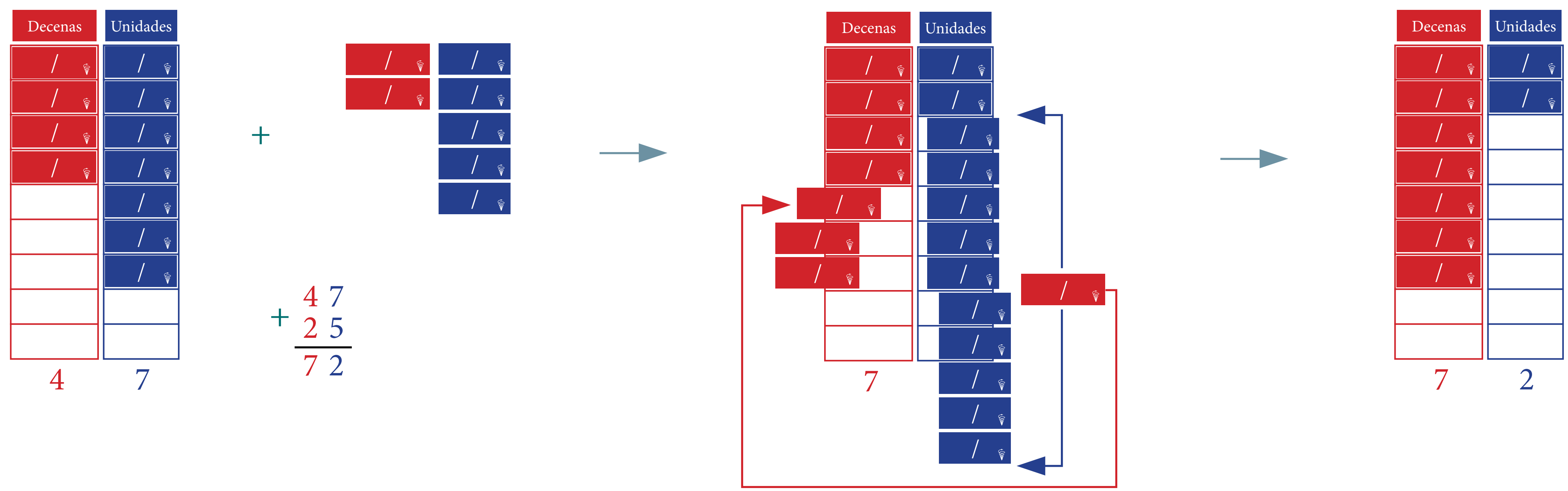
Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{l} \ 7\,6 = 7\,0 + 6 \\ -\ 3\,4 = 3\,0 + 4 \\ \hline \ 4\,0 + 2 = 4\,2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 8\,5 \\ -\ 4\,3 \\ \hline 4\,2 \end{array}$$

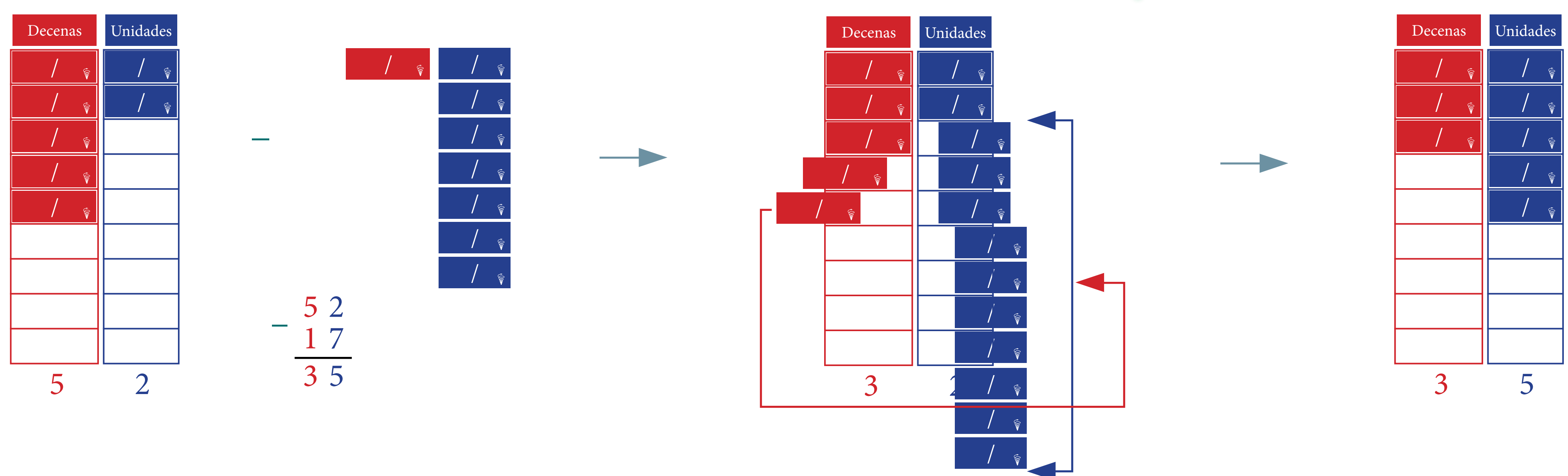
Sumas y Restas Hasta 18

Segundo Nivel de Abstracción

Sumas hasta 18 utilizando las columnas numéricas. Columna de las unidades y decenas



Restas hasta 18 utilizando las columnas numéricas. Columna de las unidades y decenas



Sumas hasta 18 utilizando las columnas numéricas

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{rcc} & 1 & \\ & 4 & 7 \\ + & 2 & 5 \\ \hline & 7 & 2 \\ & \cancel{1} & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcc} & 1 & \\ & 3 & 6 \\ + & 5 & 8 \\ \hline & 9 & 4 \\ & \cancel{1} & \end{array}$$

Restas hasta 18 utilizando las columnas numéricas

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{rcc} & 4 & 1 \\ & \cancel{5} & 2 \\ - & 1 & 7 \\ \hline & 3 & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcc} & 5 & 1 \\ & \cancel{6} & 1 \\ - & 2 & 9 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

Sumas hasta 18 en notación desarrollada y notación compacta

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{r} 1\,0 \quad\quad\quad\quad \\ 3\,7 = 3\,0 + 7 \\ +\ 4\,6 = 4\,0 + 6 \\ \hline 8\,0 + \cancel{1}3 = 8\,3 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcc} & 1 & \\ & 4 & 9 \\ + & 2 & 7 \\ \hline & 7 & 6 \\ & \cancel{1} & \end{array}$$

Restas hasta 18 en notación desarrollada y notación compacta

Columna de las unidades y decenas

$$\begin{array}{r} 6\,0 \quad\ \ 1 \\ 7\,2 = \cancel{7\,0} + 2 \\ -\ 1\,6 = 1\,0 + 6 \\ \hline 5\,0 + 6 = 5\,6 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rcc} & 7 & 1 \\ & \cancel{8} & 1 \\ - & 4 & 7 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

Tabla para practicar sumas y restas

Esta tabla tiene como objetivo que los niños practiquen las sumas y las restas. Viene acompañada de una tabla igual pero que debe ser llenada por los estudiantes.

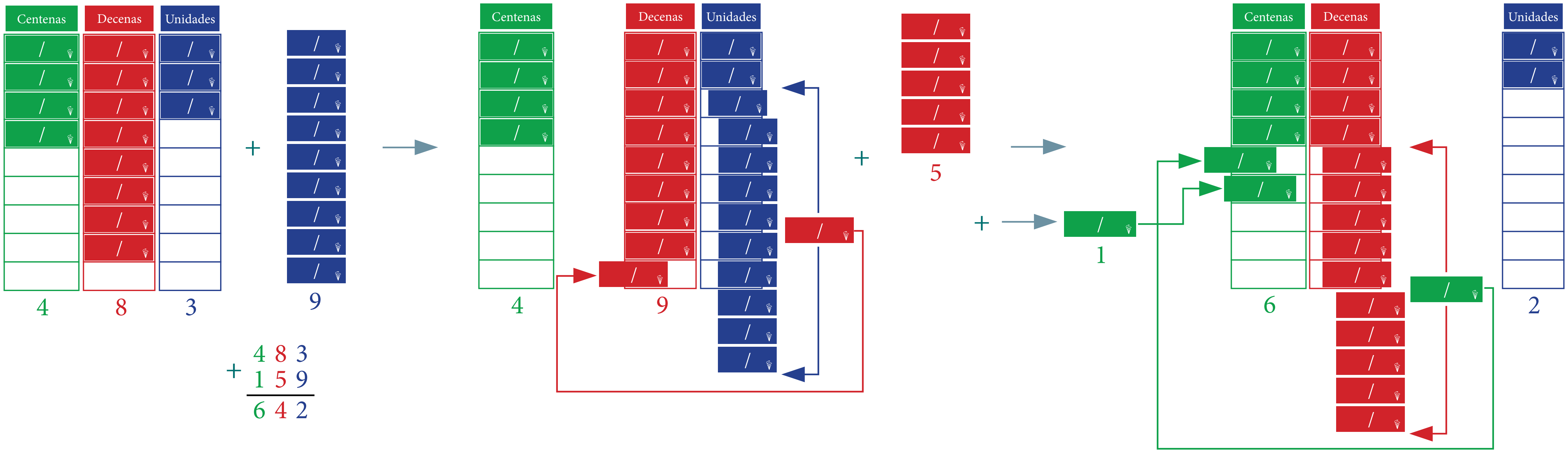
1	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	2	2	1	2	3	4	5	6	7	8
4	5	3	3	1	2	3	4	5	6	7
5	6	7	4	4	1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	5	5	1	2	3	4	5
7	8	9	10	11	6	6	1	2	3	4
8	9	10	11	12	13	7	7	1	2	3
9	10	11	12	13	14	15	8	8	1	2
10	11	12	13	14	15	16	17	9	9	1
11	12	13	14	15	16	17	18	19	10	10

Tabla de referencia rápida de la resta hasta 18

−	9	8	7	6	5	4	3	2	1
18	9								
17	8	9							
16	7	8	9						
15	6	7	8	9					
14	5	6	7	8	9				
13	4	5	6	7	8	9			
12	3	4	5	6	7	8	9		
11	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	1	2	3	4	5	6	7	8	9

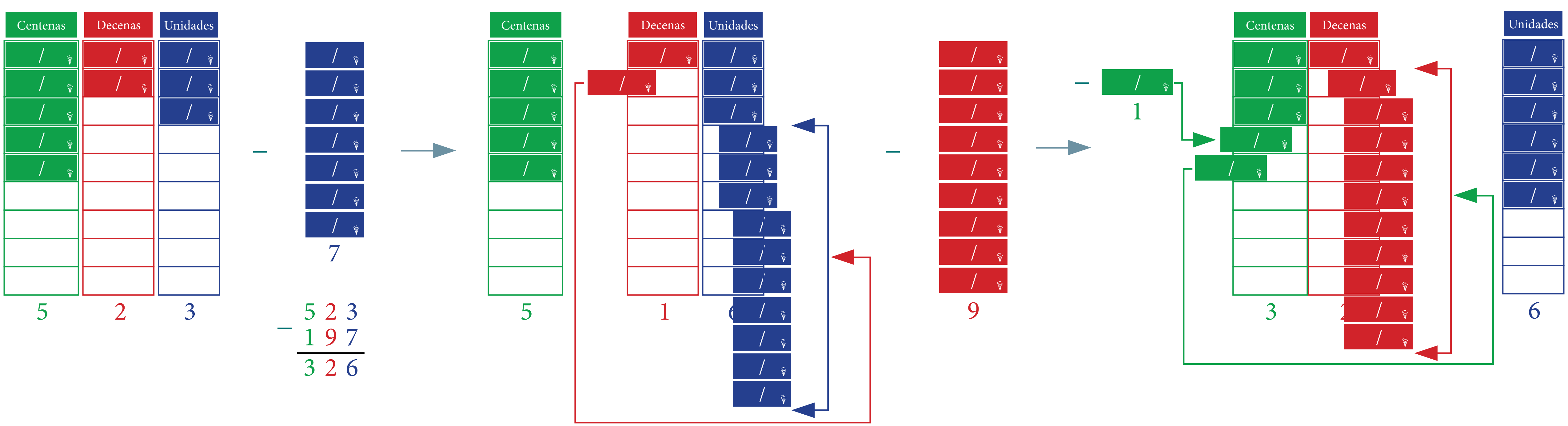
Sumas hasta 18 utilizando las columnas numéricas. Columna de las unidades y decenas

Columna de las unidades, decenas y centenas



Restas hasta 18 utilizando las columnas numéricas. Columna de las unidades y decenas

Columna de las unidades, decenas y centenas



Sumas de 0 a 999 utilizando las columnas numéricas

Columna de las unidades, decenas y centenas

$$\begin{array}{r} 1\,1 \\ 4\,8\,3 \\ +\;1\,5\,9 \\ \hline 6\,4\,2 \\ \cancel{1}\,\cancel{1} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1 \\ 1\,6\,7 \\ +\;3\,7\,8 \\ \hline 5\,4\,5 \\ \cancel{1}\,\cancel{1} \end{array}$$

Restas de 0 a 999 utilizando las columnas numéricas

Columna de las unidades, decenas y centenas

$$\begin{array}{r} 4\;{}^{1}1\;{}^{1} \\ \cancel{5}\;\cancel{2}\;3 \\ -\;1\;9\;7 \\ \hline 3\;2\;6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5\;{}^{1}1\;{}^{1} \\ \cancel{6}\;\cancel{2}\;1 \\ -\;1\;7\;4 \\ \hline 4\;4\;7 \end{array}$$

Sumas de 0 a 999 en notación desarrollada y notación compacta

Columna de las unidades, decenas y centenas

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 100 & & 10 & & & & \\ +\;567 & = & 500 & + & 60 & + & 7 & & \\ 285 & = & 200 & + & 80 & + & 5 & & \\ \hline & & 800 & + & \cancel{1}50 & + & \cancel{1}2 & = & 852 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\,1 \\ 5\,8\,4 \\ +\;1\,9\,7 \\ \hline 7\,8\,1 \\ \cancel{1}\,\cancel{1} \end{array}$$

Restas de 0 a 999 en notación desarrollada y notación compacta

Columna de las unidades, decenas y centenas

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & 300 & & {}^{1}60 & & {}^{1} & & \\ -\;473 & = & \cancel{400} & + & \cancel{70} & + & 3 & & \\ 198 & = & 100 & + & 90 & + & 8 & & \\ \hline & & 200 & + & 70 & + & 5 & = & 275 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\;{}^{1}7\;{}^{1} \\ \cancel{5}\;\cancel{8}\;4 \\ -\;1\;9\;7 \\ \hline 3\;8\;7 \end{array}$$

Sumas y Restas

Tercer Nivel de Abstracción

Sumas de cualquier número utilizando las columnas numéricas

$$
\begin{array}{r}
494\,385 \\
+\quad 26\,857 \\
\hline
521\,242
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
245\,854 \\
+\quad 376\,269 \\
\hline
622\,123
\end{array}
$$

Restas de cualquier número utilizando las columnas numéricas

$$
\begin{array}{r}
835\,645 \\
-\quad 276\,867 \\
\hline
558\,778
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
245\,854 \\
-\quad 376\,269 \\
\hline
622\,123
\end{array}
$$

Sumas de cualquier número notación compacta

$$
\begin{array}{r}
{}^{1}2\,{}^{1}7\,{}^{1}7\;\,{}^{1}2\,{}^{1}4\,6 \\
+\quad 84\,965 \\
\hline
362\,211
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
{}^{1}3\,{}^{2}4\,{}^{1}6\;\,{}^{2}5\,{}^{1}9\,3 \\
+\quad 226\,474 \\
79\,566 \\
\hline
652\,633
\end{array}
$$

Sumas de cualquier número en notación desarrollada

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 10\,000 & & 1\,000 & & 100 & & 10 & & \\
+\;47\,567 & = & 40\,000 & + & 7\,000 & + & 500 & + & 60 & + & 7 \\
25\,985 & = & 20\,000 & + & 5\,000 & + & 900 & + & 80 & + & 5 \\
\hline
 & & 70\,000 & + & \cancel{1}3\,000 & + & \cancel{1}500 & + & \cancel{1}50 & + & \cancel{1}2 \; = \; 73\,552
\end{array}
$$

Restas de cualquier número en notación desarrollada

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
 & & 60\,000 & & {}^{1}1\,000 & & {}^{1}400 & & {}^{1}30 & & \\
-\;72\,543 & = & \cancel{70\,000} & + & \cancel{2\,000} & + & \cancel{500} & + & \cancel{40} & + & {}^{1}3 \\
34\,976 & = & 30\,000 & + & 4\,000 & + & 900 & + & 70 & + & 6 \\
\hline
 & & 30\,000 & + & 7\,000 & + & 500 & + & 60 & + & 7 \; = \; 37\,567
\end{array}
$$

Restas de cualquier número en notación compacta

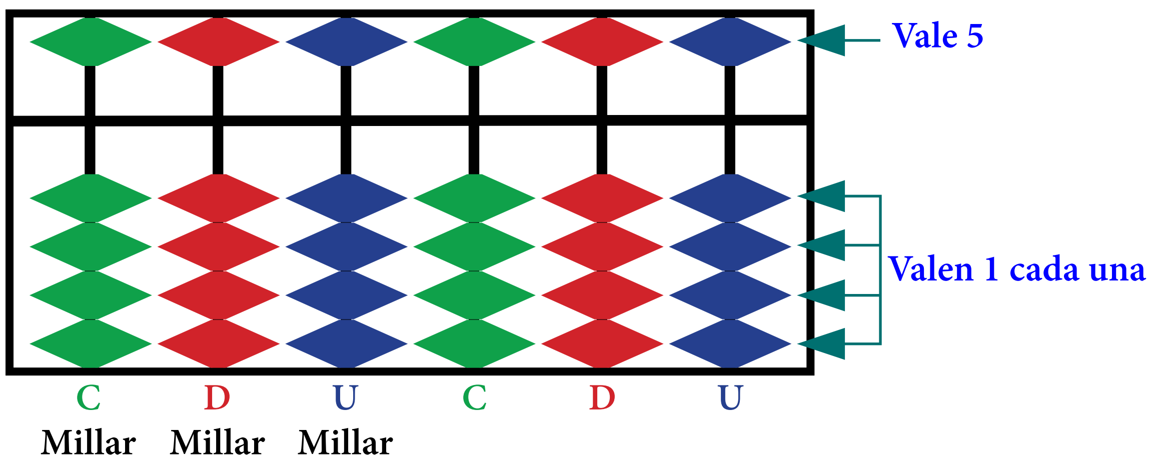
$$
\begin{array}{r}
7\;{}^{1}1\;{}^{1}4\;\;{}^{1}2\;{}^{1}3\;\; \\
\cancel{8}\,\cancel{2}\,\cancel{5}\;\cancel{3}\,\cancel{4}\,{}^{1}1 \\
-\quad 178\,956 \\
\hline
646\,385
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4\;{}^{1}0\;{}^{1}3\;\;{}^{1}1\;{}^{1}2\;\; \\
\cancel{5}\,\cancel{1}\,\cancel{4}\;\cancel{2}\,\cancel{3}\,{}^{1}5 \\
-\quad 265\,847 \\
\hline
248\,388
\end{array}
$$

Sumas y Restas Utilizando el Ábaco

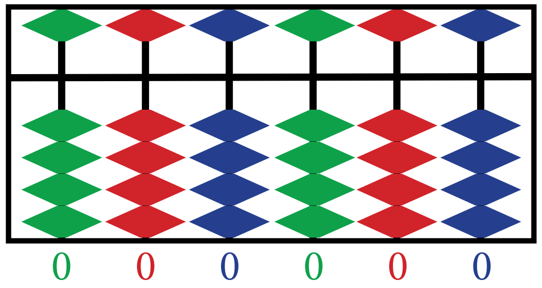
Cuarto Nivel de Abstracción

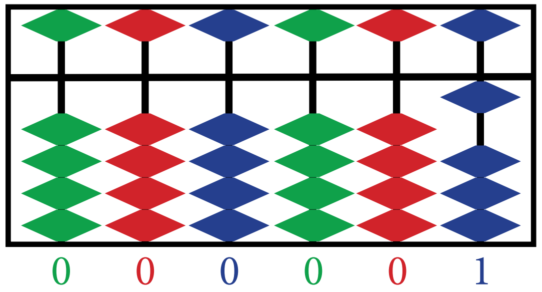
Escribir dígitos en el ábaco tipo Japonés

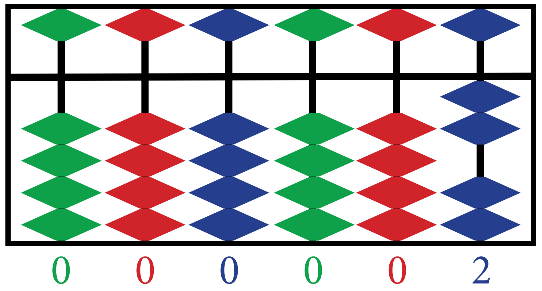
En cada una de las columnas numéricas hay 5 cuentas. La cuenta superior vale 5 unidades y cada una de las cuentas inferiores vale 1.

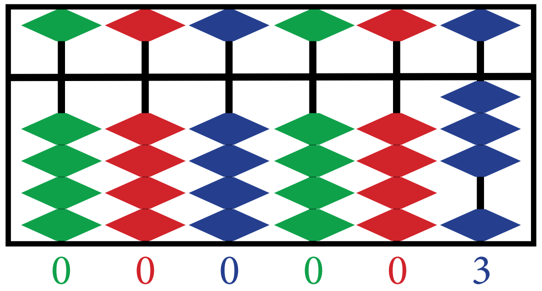


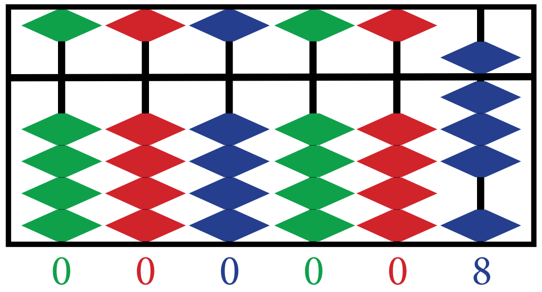
Para escribir los dígitos en las columnas numéricas bajamos las cuentas superiores y subimos las cuentas inferiores.

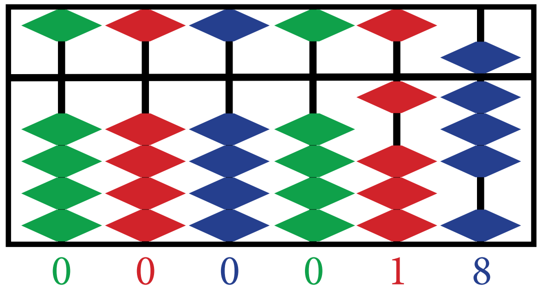


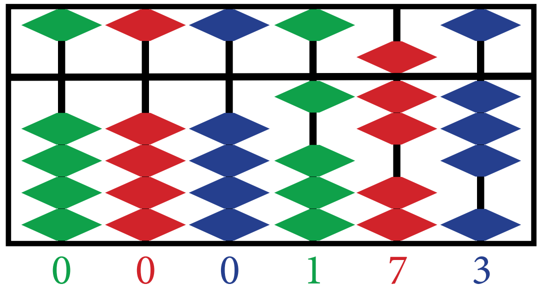


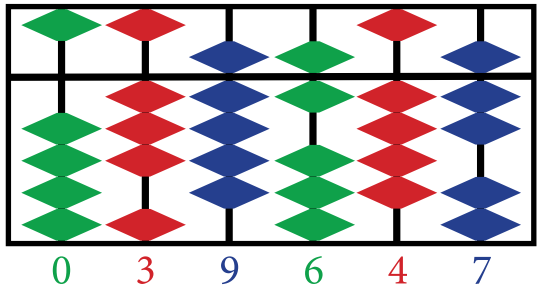












Sumas y restas hasta 9 en el ábaco tipo Japonés

Primer paso

Cuando utilizamos papel y lápiz para realizar sumas o restas, primero debemos escribir las cantidades que deseamos sumar o restar. Escribimos los número de izquierda a derecha.

Una vez que hemos escrito los números, entonces los sumamos o restamos de derecha a izquierda.

En el ábaco, a diferencia de las columnas numéricas, sumamos y restamos de izquierda a derecha.

Al mismo tiempo que vamos escribiendo el número, de izquierda a derecha, lo vamos sumando o restando al otro número.

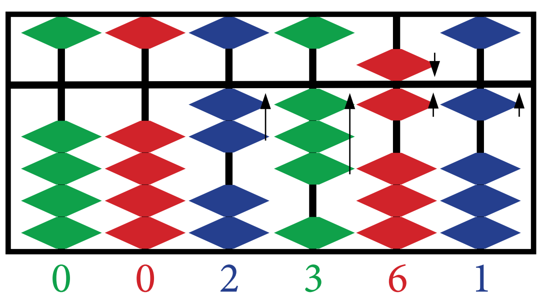
El ir sumando al mismo tiempo que vamos escribiendo los números, permite que podamos hacer las sumas a mucho mayor velocidad, ya que no requeriremos de papel y lápiz para ver el número que sumamos.

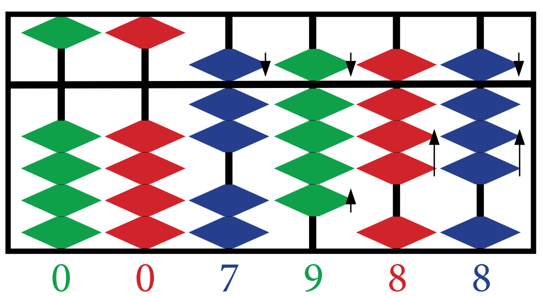
Sumar: $\begin{array}{r} 2{,}361 \\ +\ 5{,}627 \end{array}$

Escribimos: 2,361

Sumamos: 5,627

Escribimos el número, sumamos, de izquierda a derecha.





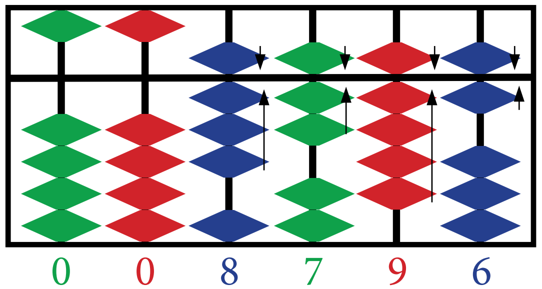
2,361 + 5,627 = 7,988

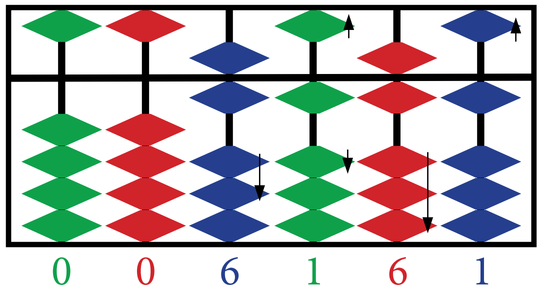
Restar: $\begin{array}{r} 8{,}796 \\ -\ 2{,}635 \end{array}$

Escribimos: 8,796

Restamos: 2,635

Restamos el número de izquierda a derecha descontando los dígitos.





8,796 – 2,635 = 6,161

Sumas y restas hasta 9 en el ábaco tipo Japonés

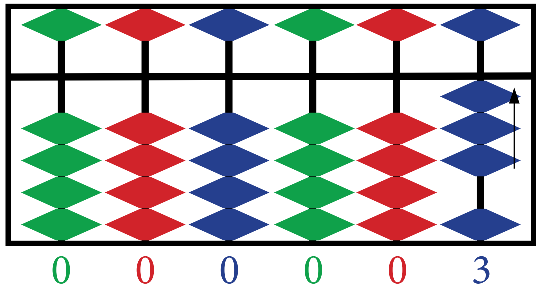
Segundo paso

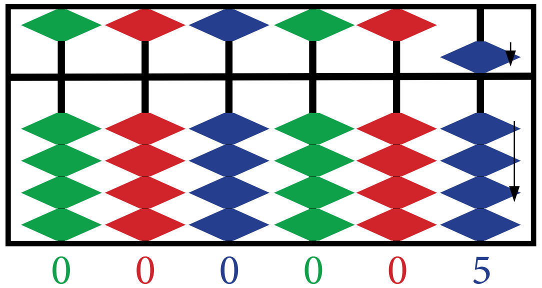
Sumar: $\begin{array}{r} 3 \\ +\ 2 \end{array}$

Escribimos: 3

Sumamos: 2

En la columna de las unidades solamente tenemos 1 ficha disponible. Por lo tanto, sumamos 5 y le quitamos 3, ya que: 2 = 5 – 3.





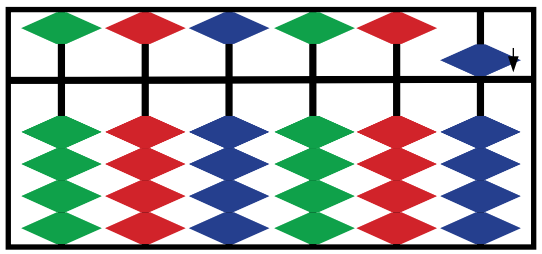
3 + 2 = 5

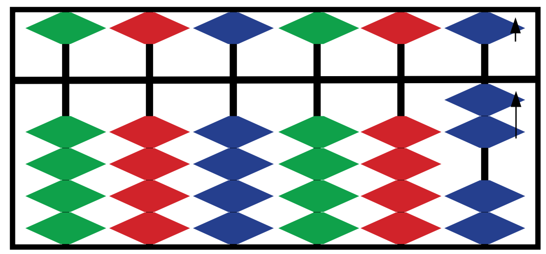
Restar: $\begin{array}{r} 5 \\ -\ 3 \end{array}$

Escribimos: 5

Restamos: 3

En la columna de las unidades solamente tenemos 1 cuenta que vale 5. Por lo tanto, le quitamos 5 y le sumamos 2, ya que: $3 = -5 + 2$.


0 0 0 0 0 5


0 0 0 0 0 2

$5 - 3 = 2$

Sumas y restas hasta 18 en el ábaco tipo Japonés

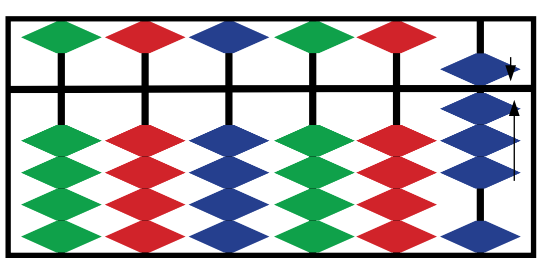
Tercer paso

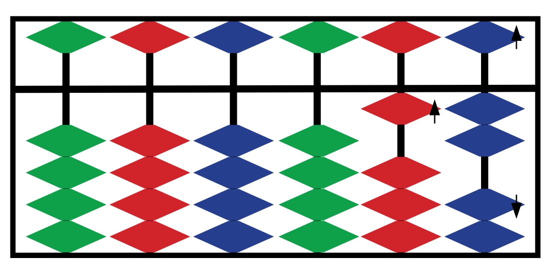
Sumar: $\begin{array}{r} 8 \\ +\ 4 \end{array}$

Escribimos: 8

Sumamos: 4

En la columna de las unidades solamente tenemos 1 ficha disponible. Por lo tanto, sumamos 10 y le quitamos 6, ya que: $4 = 10 - 6$.


0 0 0 0 0 8


0 0 0 0 1 2

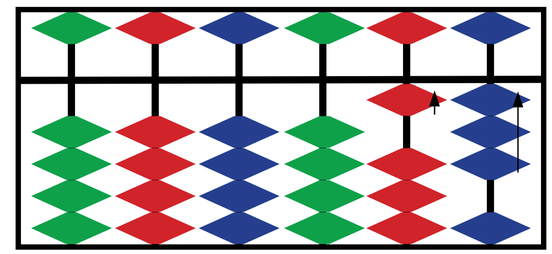
$8 + 4 = 12$

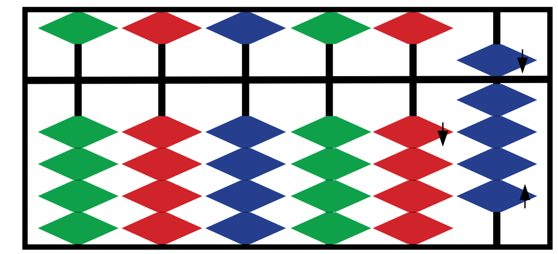
Restar: $\begin{array}{r} 13 \\ -\ 4 \end{array}$

Escribimos: 13

Restamos: 4

En la columna de las unidades solamente tenemos 3 cuentas. Por lo tanto, restamos 10 y le sumamos 6, ya que: $4 = -10 + 6$.


0 0 0 0 1 3


0 0 0 0 0 9

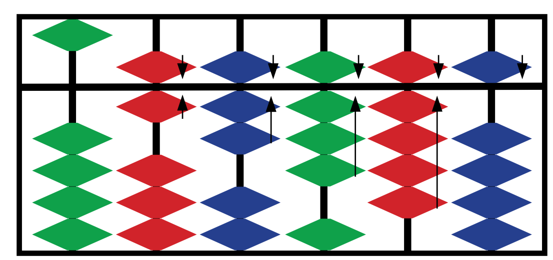
$13 - 4 = 9$

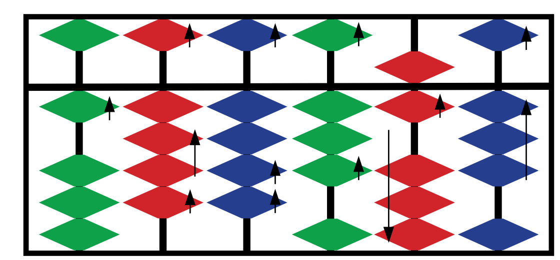
Sumar: $\begin{array}{r} 67{,}895 \\ +\ 76{,}468 \end{array}$

Escribimos: 67,895

Sumamos: 76,468

Siguiendo el procedimiento descrito, efectuamos la suma de izquierda a derecha. Primero sumamos las decenas de millar, después las unidades de millar, y así sucesivamente.


0 6 7 8 9 5


1 4 4 4 6 3

$67{,}895 + 76{,}468 = 144{,}363$

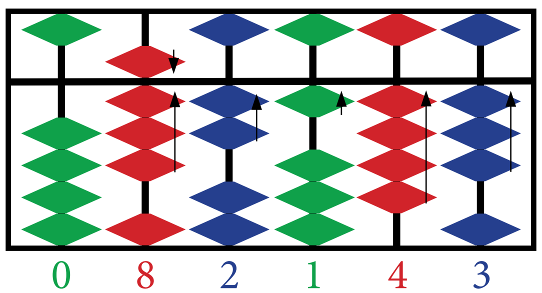
Restar:

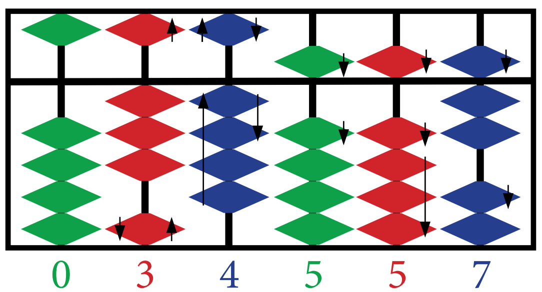
$$\begin{array}{r} -\ 82{,}143 \\ 47{,}586 \end{array}$$

Escribimos: 82,143

Restamos: 47,586

Siguiendo el procedimiento descrito, efectuamos la resta de izquierda a derecha. Primero restamos las decenas de millar, después las unidades de millar, y así sucesivamente.





82,143 – 47,586 = 34,557

Sumas y Restas de Números Enteros y Decimales

Cuarto Nivel de Abstracción

Suma y resta de cualquier cantidad de números enteros

Los estudiantes ahora están preparados para resolver cualquier suma o resta de números enteros, sin importar la cantidad de cifras, utilizando el algoritmo o el ábaco.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & \\
 & & & 2 & 7 & 9 & 3 & 5 & 6 \\
 & & & & & 8 & 1 & 8 & 2 \\
 & & 8 & 7 & 5 & 4 & 9 & 6 & 8 \\
+ & & & 6 & 8 & 8 & 6 & 7 & 9 \\
 & & 4 & 9 & 2 & 4 & 6 & 7 & 5 \\
 & & & & 8 & 7 & 3 & 5 & 7 \\
\hline
 & 1 & 4 & 7 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccccc}
 & 8 & {}^{1}2 & & 6 & 9 & 9 & \\
 & \cancel{9} & \cancel{3} & {}^{1}0 & \cancel{7} & {}^{1}\cancel{0} & {}^{1}\cancel{0} & {}^{1}0 \\
- & 3 & 9 & 4 & 1 & 6 & 5 & 2 \\
\hline
 & 5 & 3 & 6 & 5 & 3 & 4 & 8
\end{array}
$$

Suma y resta de números en notación decimal

Utilizando el concepto de la división y las columnas numéricas, podemos expresar los números fraccionarios o racionales en notación decimal.

Usando el algoritmo de la suma y de la resta podemos sumar y restar números expresados en notación decimal.

El punto decimal lo utilizamos como referencia para acomodar los números en notación decimal en las columnas numéricas.

$$42\,727.323 + 2.81864 + 656.216$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 42\,727.323 \\
+ & 2.81864 \\
 & 656.216 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 42\,727.32300 \\
+ & 2.81864 \\
 & 656.21600 \\
\hline
 & 43\,386.35764
\end{array}
$$

$$96\,253.55 - 2\,727.32323$$

$$
\begin{array}{rr}
 & 96\,253.55 \\
- & 2\,727.32323 \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr}
 & 96\,253.55000 \\
- & 2\,727.32323 \\
\hline
 & 93\,526.22677
\end{array}
$$

Suma y Resta Combinadas

Quinto Nivel de Abstracción

Varias sumas y una resta

Primero efectuamos todas las sumas y al resultado le restamos el número.

$4\,968 + 8\,679 + 4\,675 - 7\,357$

$$\begin{array}{r} 4\,968 \\ +\ 8\,679 \\ 4\,675 \\ -\ 7\,357 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 18\,322 \\ -\ 7\,357 \\ \hline 10\,965 \end{array}$$

Varias sumas y varias restas

$7\,956 + 4\,287 - 3\,879 + 7\,462 - 6\,748$

Ordenamos todas las sumas y todas las restas juntas.

$7\,956 + 4\,287 + 8\,462 - 6\,748 - 3\,879$

$$\begin{array}{r} 7\,956 \\ +\ 4\,287 \\ 8\,462 \\ -\ 6\,748 \\ -\ 3\,879 \\ \hline \end{array}$$

Dos formas de realizar las sumas y las restas

Primera forma

Efectuamos todas las sumas. Al resultado de las sumas le restamos el primer número; y al resultado de esta resta le restamos el segundo número.

$$\begin{array}{r} 7\,956 \\ +\ 4\,287 \\ 8\,462 \\ -\ 6\,748 \\ -\ 3\,879 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20\,705 \\ -\ 6\,748 \\ -\ 3\,879 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13\,957 \\ -\ 3\,879 \\ \hline 10\,078 \end{array}$$

Segunda forma

Restar el primer número y después restar el segundo número, es equivalente a sumar los dos números y el resultado restarlo al resultado de la suma de las sumas.

Usamos un paréntesis para indicar que los dos números están restando.

$7\,956 + 4\,287 + 8\,462 - (6\,748 + 3\,879)$

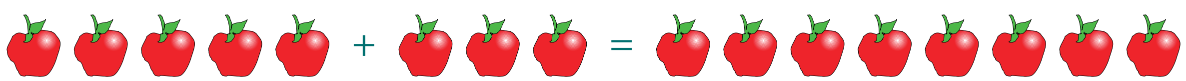
$$\begin{array}{r} 7\,956 \\ +\ 4\,287 \\ 8\,462 \\ -\ 6\,748 \\ -\ 3\,879 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 20\,705 \\ -\ 10\,627 \\ \hline 10\,078 \end{array}$$

La Suma y la Resta Son Operaciones Inversas

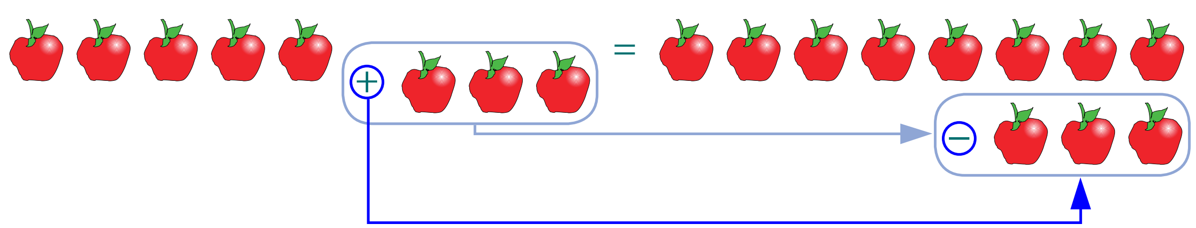
Quinto Nivel de Abstracción

La resta es la operación inversa de la suma

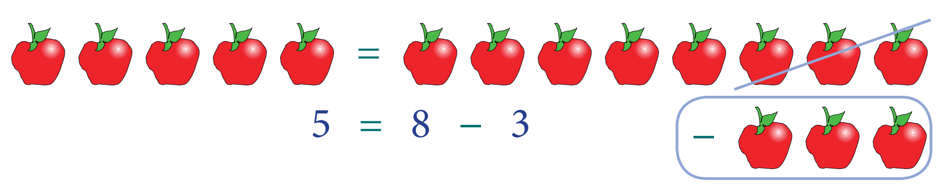
Sumamos dos conjuntos de objetos.



$5 + 3 = 8$

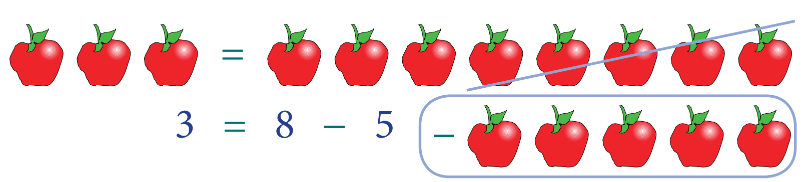


Las 3 manzanas que están sumando ahora las pasamos al otro lado del signo = restando.



$5 = 8 - 3$

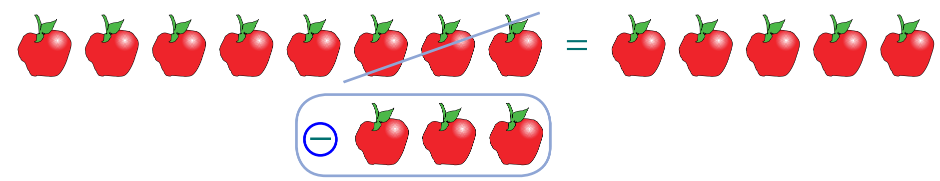
Lo mismo podemos hacer con las 5 manzanas.



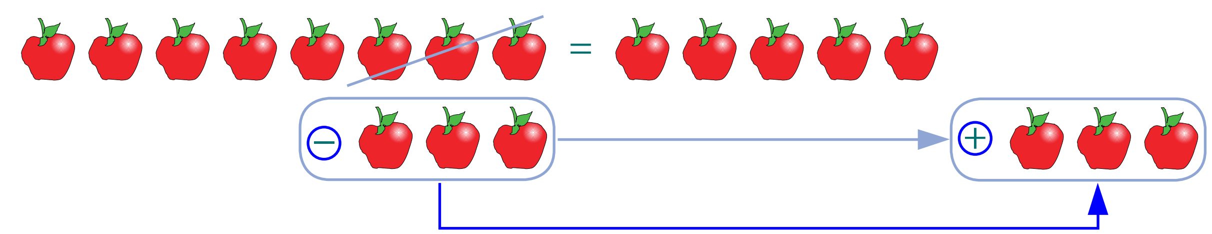
$3 = 8 - 5$

La suma es la operación inversa de la resta

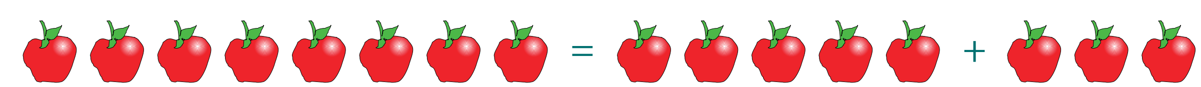
Restamos un conjunto de objetos de otro.



$8 - 3 = 5$

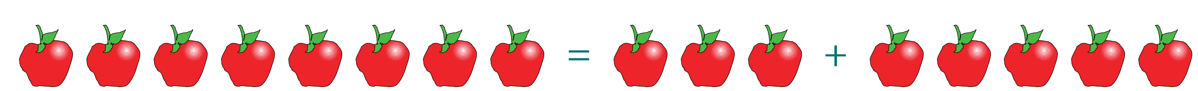


Las 3 manzanas que restamos ahora las pasamos al otro lado del signo = sumando.



$8 = 5 + 3$

Lo mismo podemos hacer con las 5 manzanas.



$8 = 3 + 5$

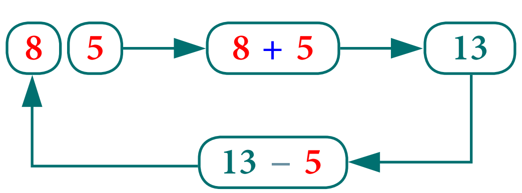
Sexto Nivel de Abstracción

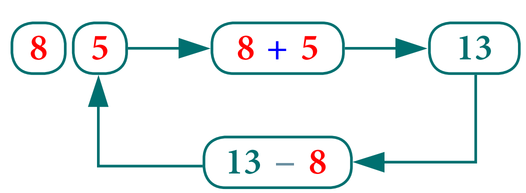
Concepto de operación inversa

A los datos le aplicamos una operación y obtenemos el resultado. Ahora bien, si conocemos el resultado y queremos conocer de qué datos procede, utilizamos la operación inversa.

La resta es la operación inversa de la suma

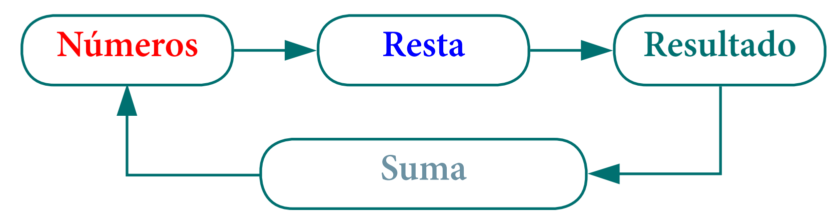
Cuando a dos números les aplicamos la operación suma obtenemos el resultado. Ahora bien, si queremos conocer de qué números procede el resultado, utilizamos la resta. Por esta razón, la resta es la operación inversa de la suma.

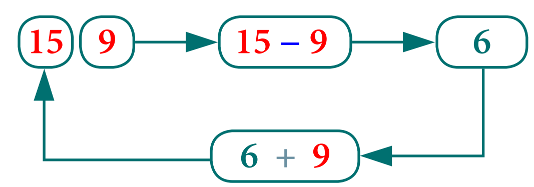


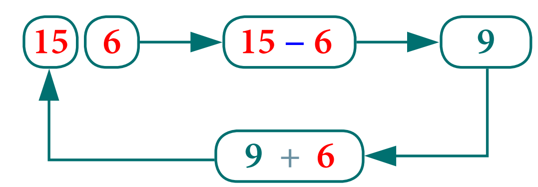


La suma es la operación inversa de la resta

Cuando a dos números les aplicamos la operación resta obtenemos el resultado. Ahora bien, si queremos conocer de qué números procede el resultado, utilizamos la suma. Por esta razón, la suma es la operación inversa de la resta.







Capítulo 4

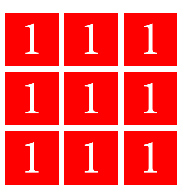
Operaciones Básicas
Multiplicación

Multiplicación

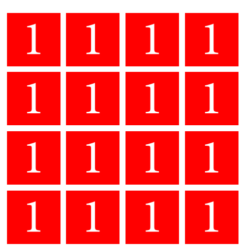
Segundo Nivel de Abstracción

Concepto de multiplicación

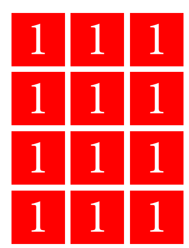
Multiplicar significa sumar en forma rápida las unidades de área (cuadritos) que hay dentro de un cuadrado o un rectángulo. El número de unidades de área (cuadritos) que forman un cuadrado o un rectángulo son el área.



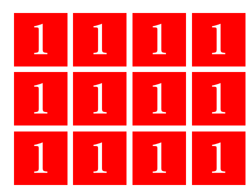
Área
9 cuadritos



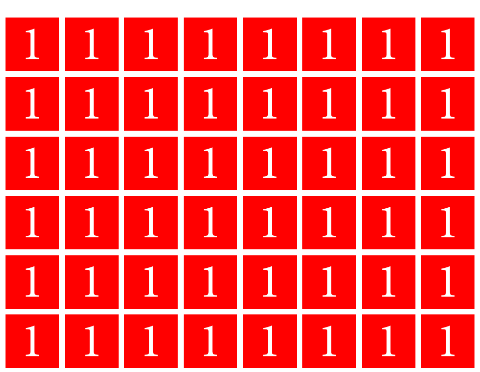
Área
16 cuadritos



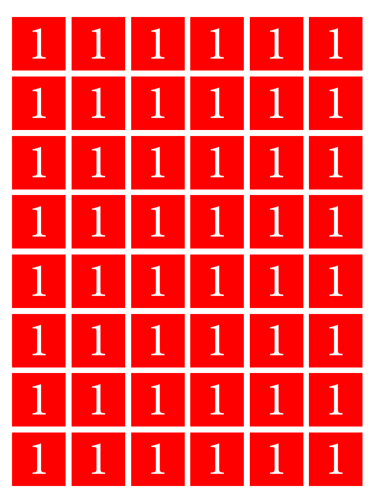
Área
12 cuadritos



Área
12 cuadritos



Área
48 cuadritos



Área
48 cuadritos

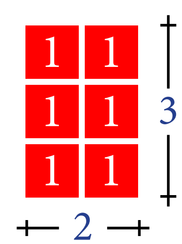
Tablas de multiplicar

Para que sea más fácil sumar de manera rápida las unidades de área (cuadritos) contamos el número de cuadritos que forman la base y la altura del cuadrado o el rectángulo.

De esta forma podemos construir las tablas de multiplicar, ya que un cuadrado o rectángulo que tienen la misma base y altura, también tienen la misma área.

Para conocer el número de cuadritos que forman el área de un cuadrado o rectángulo los contamos uno a uno. Ahora bien, como el número de cuadritos siempre es el mismo cuando la base y la altura son las mismas, entonces creamos la operación *multiplicación*.

Para indicar la operación *multiplicación* utilizamos el *símbolo* ×.



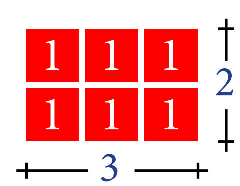
Área = 6

Multiplicamos la base por la altura.

$$2 \times 3$$

Sabemos que el resultado es 6 porque el área es 6 cuadritos.

$$2 \times 3 = 6$$



Área = 6

Multiplicamos la base por la altura.

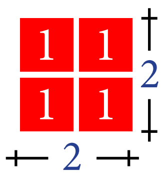
$$3 \times 2$$

Sabemos que el resultado es 6 porque el área es 6 cuadritos.

$$3 \times 2 = 6$$

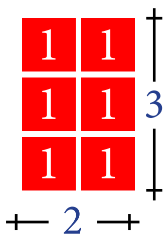
Siguiendo esta estrategia creamos las tablas de multiplicar.

Tabla del 2



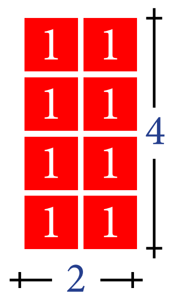
Área = 4

2 × 2 = 4



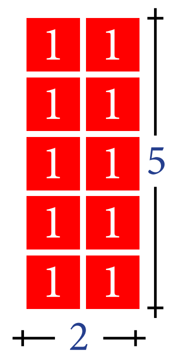
Área = 6

2 × 3 = 3



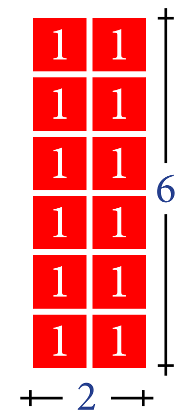
Área = 8

2 × 4 = 8



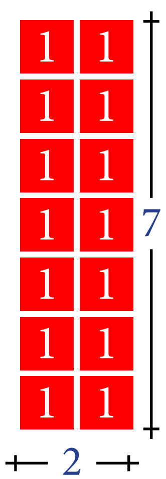
Área = 10

2 × 5 = 10



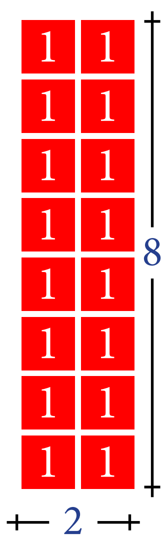
Área = 12

2 × 6 = 12



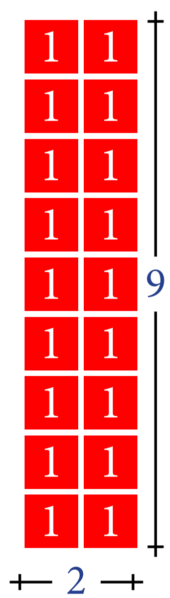
Área = 14

2 × 7 = 14



Área = 16

2 × 8 = 16

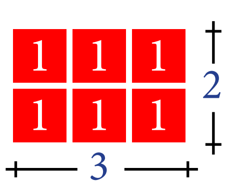


Área = 18

2 × 8 = 18

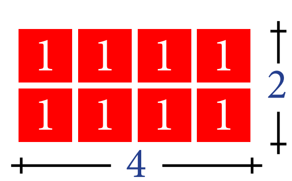
2 × 2 = 4	2 × 2 = 4
2 × 3 = 6	3 × 2 = 6
2 × 4 = 8	4 × 2 = 8
2 × 5 = 10	5 × 2 = 10
2 × 6 = 12	6 × 2 = 12
2 × 7 = 14	7 × 2 = 14
2 × 8 = 16	8 × 2 = 16
2 × 9 = 18	9 × 2 = 18

El área es la misma, sin importar si los rectángulos son verticales u horizontales.



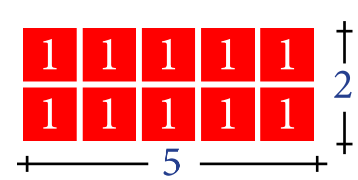
Área = 6

2 × 3 = 3



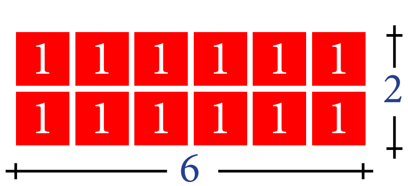
Área = 8

2 × 4 = 8



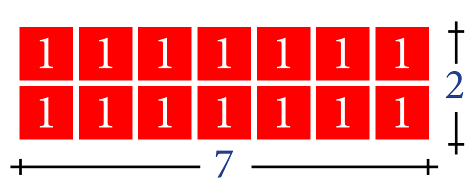
Área = 10

2 × 5 = 10



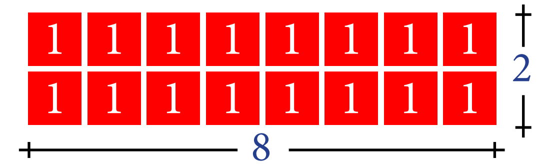
Área = 12

2 × 6 = 12



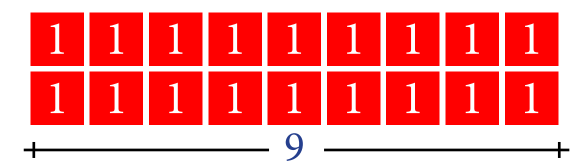
Área = 14

2 × 7 = 14



Área = 16

2 × 8 = 16



Área = 18

2 × 8 = 18

Siguiendo el mismo procedimiento, construimos las demás tablas de multiplicar.

3 × 2 = 6	2 × 3 = 6	4 × 2 = 8	2 × 4 = 8
3 × 3 = 9	3 × 3 = 9	4 × 3 = 12	3 × 4 = 12
3 × 4 = 12	4 × 3 = 12	4 × 4 = 16	4 × 4 = 16
3 × 5 = 15	5 × 3 = 15	4 × 5 = 20	5 × 4 = 20
3 × 6 = 18	6 × 3 = 18	4 × 6 = 24	6 × 4 = 24
3 × 7 = 21	7 × 3 = 21	4 × 7 = 28	7 × 4 = 28
3 × 8 = 24	8 × 3 = 24	4 × 8 = 32	8 × 4 = 32
3 × 9 = 27	9 × 3 = 27	4 × 9 = 36	9 × 4 = 36

5 × 2 = 10	2 × 5 = 10	6 × 2 = 12	2 × 6 = 12
5 × 3 = 15	3 × 5 = 15	6 × 3 = 18	3 × 6 = 18
5 × 4 = 20	4 × 5 = 20	6 × 4 = 24	4 × 6 = 24
5 × 5 = 25	5 × 5 = 25	6 × 5 = 30	5 × 6 = 30
5 × 6 = 30	6 × 5 = 30	6 × 6 = 36	6 × 6 = 36
5 × 7 = 35	7 × 5 = 35	6 × 7 = 42	7 × 6 = 42
5 × 8 = 40	8 × 5 = 40	6 × 8 = 48	8 × 6 = 48
5 × 9 = 45	9 × 5 = 45	6 × 9 = 54	9 × 6 = 54

7 × 2 = 14	2 × 7 = 14	8 × 2 = 16	2 × 8 = 16
7 × 3 = 21	3 × 7 = 21	8 × 3 = 24	3 × 8 = 24
7 × 4 = 28	4 × 7 = 28	8 × 4 = 32	4 × 8 = 32
7 × 5 = 35	5 × 7 = 35	8 × 5 = 30	5 × 8 = 30
7 × 6 = 42	6 × 7 = 42	8 × 6 = 38	6 × 8 = 38
7 × 7 = 49	7 × 7 = 49	8 × 7 = 46	7 × 8 = 46
7 × 8 = 56	8 × 7 = 56	8 × 8 = 54	8 × 8 = 54
7 × 9 = 63	9 × 7 = 63	8 × 9 = 62	9 × 8 = 62

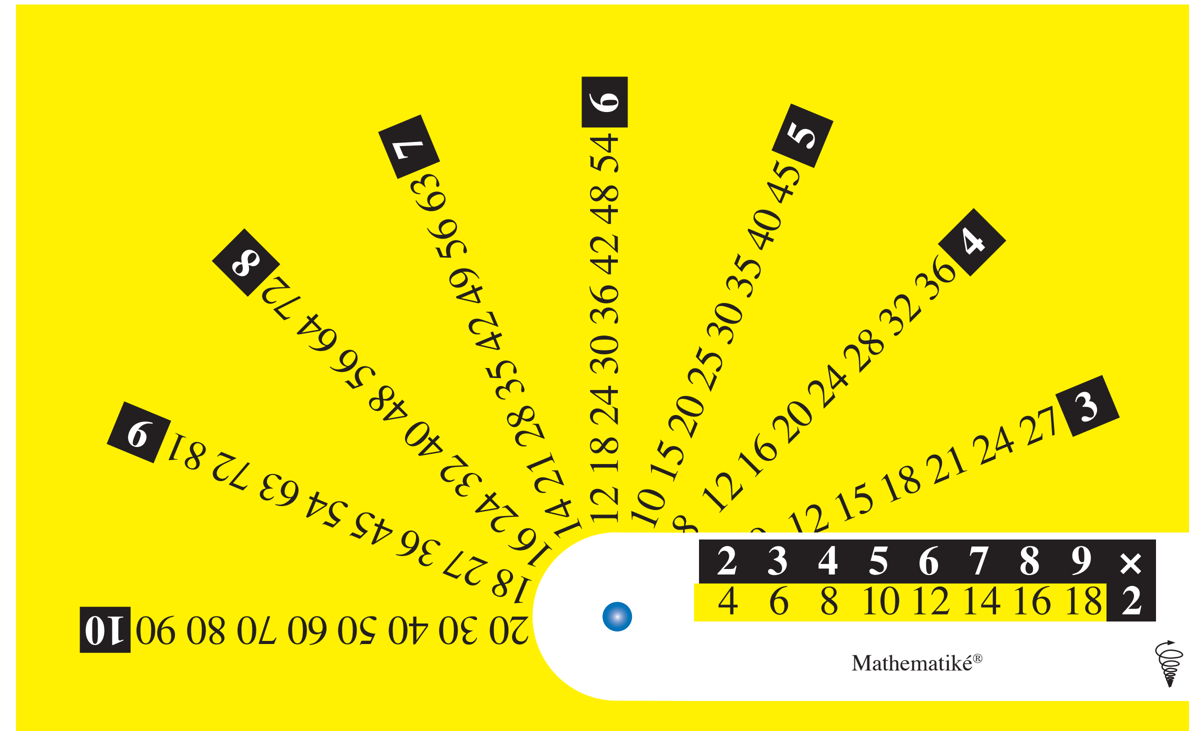
9 × 2 = 18	2 × 9 = 18
9 × 3 = 27	3 × 9 = 27
9 × 4 = 36	4 × 9 = 36
9 × 5 = 45	5 × 9 = 45
9 × 6 = 54	6 × 9 = 54
9 × 7 = 63	7 × 9 = 63
9 × 8 = 72	8 × 9 = 72
9 × 9 = 81	9 × 9 = 81

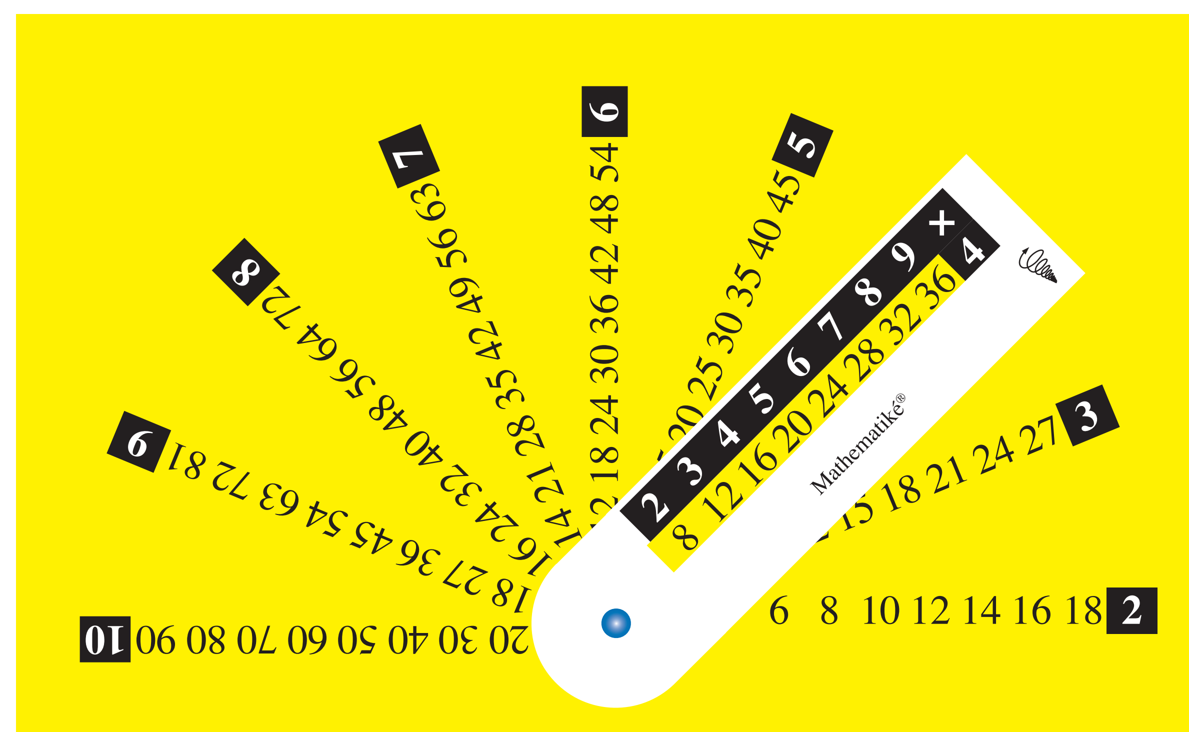
Tabla de referencia rápida de la multiplicación

Es importante que los niños memoricen las tablas de multiplicar.

Los juegos educativos y las tablas de referencia rápida, ayudan a los alumnos a memorizarlas.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81





Algoritmo de la Multiplicación

Segundo Nivel de Abstracción

Primer paso

Formas de escribir las multiplicaciones

Cuando multiplicamos dos dígitos, hay dos formas en las cuales podemos escribir la multiplicación: en forma horizontal o en forma vertical.

Cuando escribimos la multiplicación en forma vertical, utilizamos las columnas numéricas.

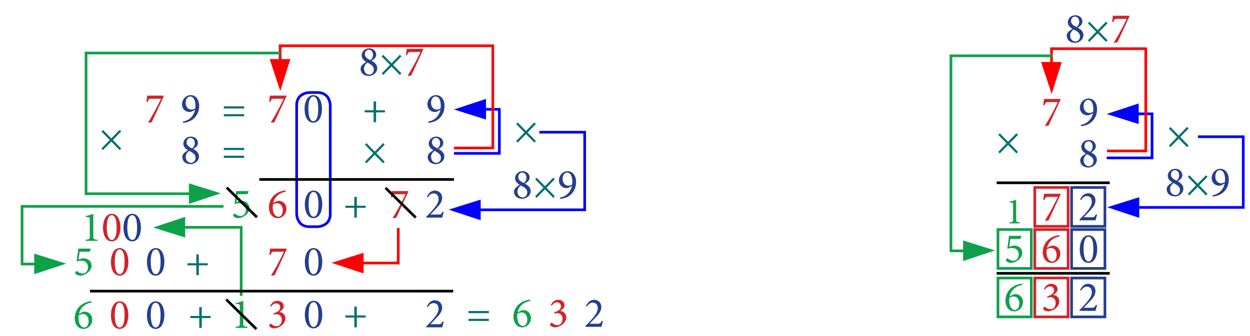
$3 \times 6 = 18 \longrightarrow \begin{array}{r} 6 \\ \times\ 3 \\ \hline 1\ 8 \end{array}$ $\qquad 7 \times 5 = 35 \longrightarrow \begin{array}{r} 5 \\ \times\ 7 \\ \hline 3\ 5 \end{array}$

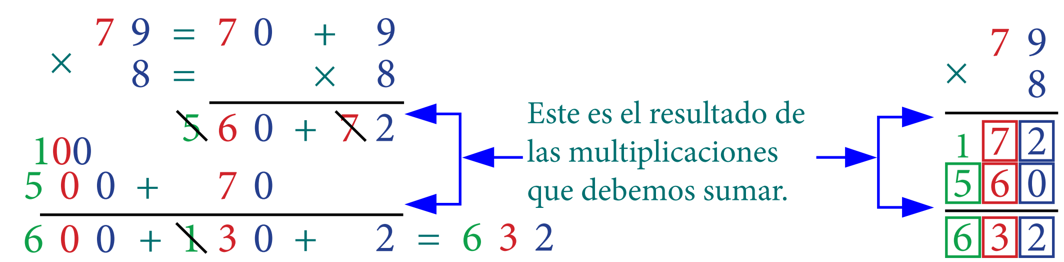
Segundo paso

Utilizando notación desarrollada y la cuadrícula

En este segundo paso el multiplicando tiene dos dígitos y el multiplicador uno.

Todas las columnas numéricas se comportan de la misma forma. Debemos tener en cuenta en qué columna se encuentra los dígitos que multiplicamos. El procedimiento para multiplicar es el mismo. Utilizamos las tablas de multiplicar, en todas las columnas, de la misma forma que lo hacemos en la columna de las unidades.





Tercer Nivel de Abstracción

Tercer paso

Utilizando la cuadrícula

En este tercer paso el multiplicando tiene tres dígitos y el multiplicador uno.

La columna de las centenas se comporta de la misma forma que la columna de las unidades. Tomando en cuenta la columna en la cual se encuentra el dígito, utilizando las tablas de multiplicar, efectuamos la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 5\,8\,7 \\ \times \quad 6 \\ \hline {}_1\boxed{4}\boxed{2} \\ \boxed{4}\boxed{8}\boxed{0} \\ \boxed{3}\boxed{0}\boxed{0}\boxed{0} \\ \hline \boxed{3}\boxed{5}\boxed{2}\boxed{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9\,7\,9 \\ \times \quad 8 \\ \hline {}_1\boxed{7}\boxed{2} \\ \boxed{5}\boxed{6}\boxed{0} \\ \boxed{7}\boxed{2}\boxed{0}\boxed{0} \\ \hline \boxed{7}\boxed{8}\boxed{3}\boxed{2} \end{array}$$

Cuarto paso

Sin cuadrícula y el algoritmo compacto

El multiplicando tiene dos cifras y el multiplicador una.

Seguimos el mismo procedimiento que en el paso tres pero sin la cuadrícula, lo cual nos prepara para utilizar el algoritmo compacto.

$$\begin{array}{r} 7\,9 \\ \times \quad 8 \\ \hline {}_1\,7\,2 \\ 5\,6\,0 \\ \hline 6\,3\,2 \end{array}$$

Multiplicamos $8 \times 9 = 72$.
Escribimos el 2 y "llevamos mentalmente" el 7.
Multiplicamos $8 \times 7 = 56$.
Sumamos mentalmente:
$7 + 6 = 13$.
$1 + 5 = 6$.

$$\begin{array}{r} 7\,9 \\ \times \quad 8 \\ \hline 6\,3\,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6\,8 \\ \times \quad 9 \\ \hline {}_1\,7\,2 \\ 5\,4\,0 \\ \hline 6\,1\,2 \end{array}$$

Multiplicamos $9 \times 8 = 72$.
Escribimos el 2 y "llevamos mentalmente" el 7.
Multiplicamos $9 \times 6 = 54$.
Sumamos mentalmente:
$7 + 4 = 11$.
$1 + 5 = 6$.

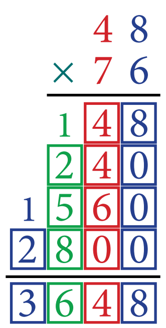
$$\begin{array}{r} 6\,8 \\ \times \quad 9 \\ \hline 6\,1\,2 \end{array}$$

Quinto paso

Con cuadrícula, sin cuadrícula y el algoritmo compacto

El multiplicando tiene dos cifras y el multiplicador dos.

Seguimos el mismo procedimiento que en el cuarto paso, poniendo mucha atención en qué columna se encuentran los dígitos que multiplicamos.



Multiplicamos 6 × 40 = 240.

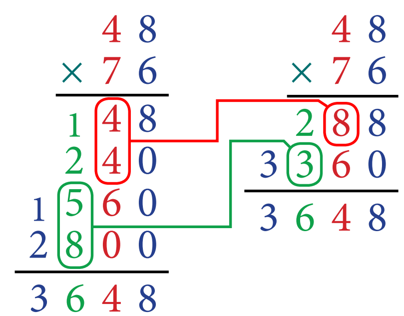
Por eso escribimos el 0 o lo recorremos una columna a la izquierda.

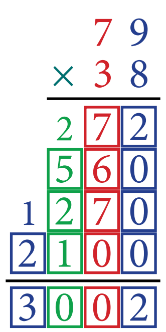
Multiplicamos 70 × 8 = 560.

Por eso escribimos el 0 o lo recorremos una columna a la izquierda.

Multiplicamos 70 × 40 = 2,800.

Por eso escribimos el 00 o lo recorremos dos columna a la izquierda.





Multiplicamos 8 × 70 = 560.

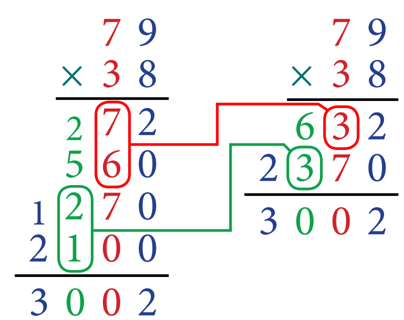
Por eso escribimos el 0 o lo recorremos una columna a la izquierda.

Multiplicamos 30 × 9 = 270.

Por eso escribimos el 0 o lo recorremos una columna a la izquierda.

Multiplicamos 30 × 70 = 2,100.

Por eso escribimos el 00 o lo recorremos dos columna a la izquierda.



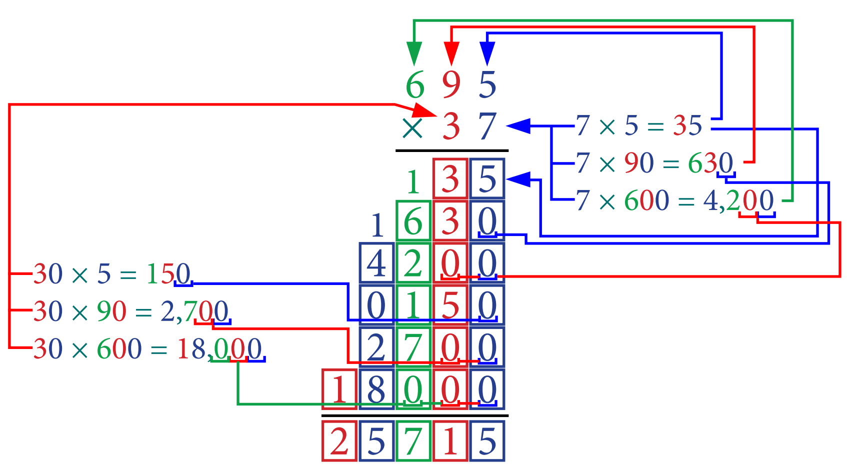
Cuarto Nivel de Abstracción

Sexto paso

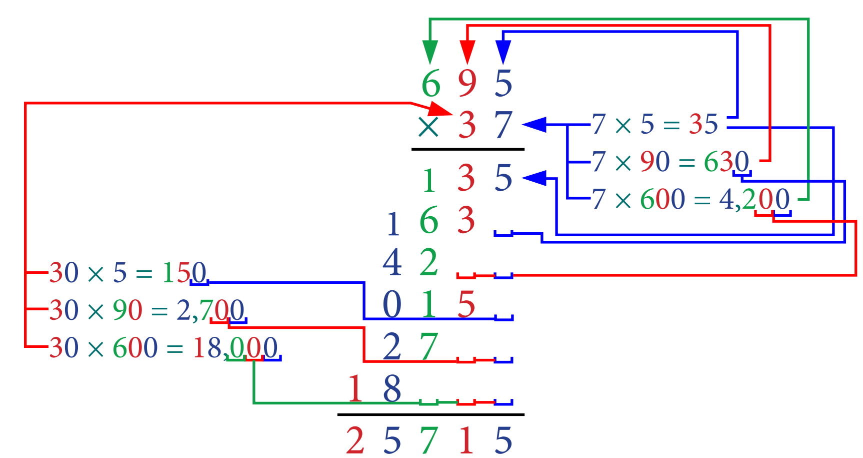
Con cuadrícula, sin cuadrícula y el algoritmo compacto

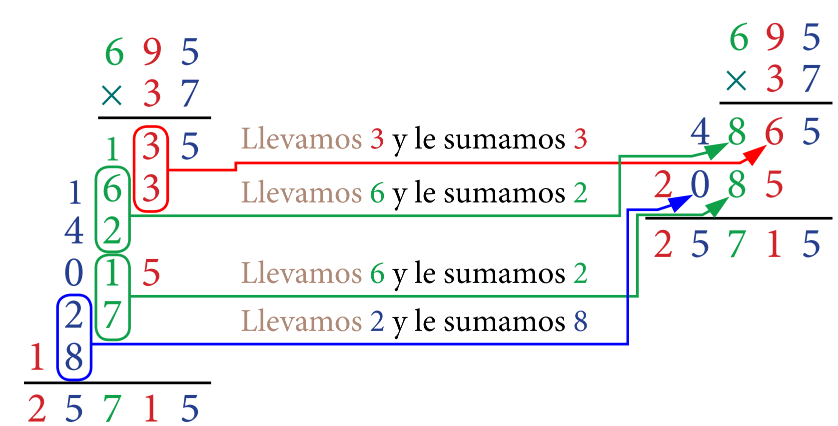
El multiplicando tiene tres cifras y el multiplicador dos.

Seguimos el mismo procedimiento que en el quinto paso, tomando en cuenta la columna en la cual se encuentran los dígitos que multiplicamos.



Realizamos la multiplicación sin utilizar la cuadrícula y utilizando el algoritmo compacto.

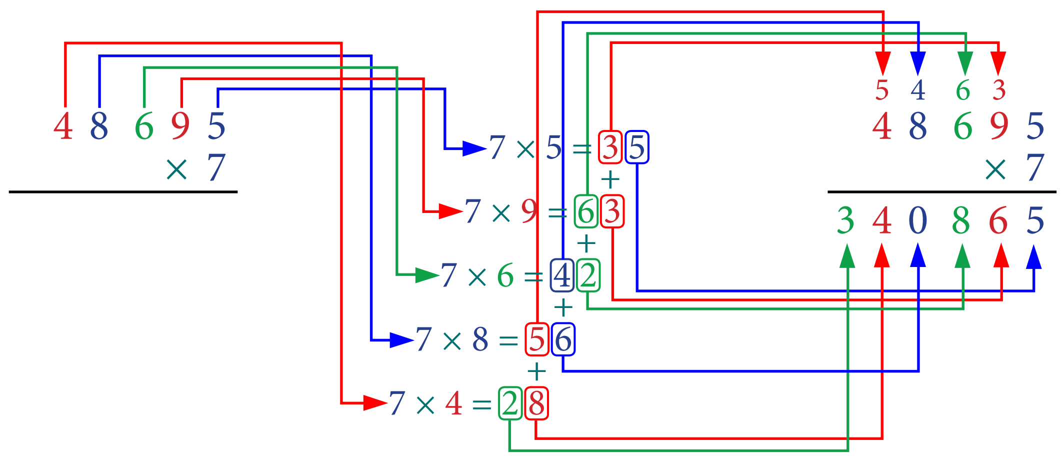




Séptimo paso

Multiplicaciones utilizando el algoritmo compacto

Cuando utilizamos el algoritmo compacto, multiplicamos cada uno de los dígitos del multiplicador con uno de los dígitos del multiplicando, tomando en cuenta la columna en la cual se encuentran, y realizando las sumas mentalmente.



$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & 4 & 3 & 4 & 2 & & & & \\
 & & \cancel{7} & \cancel{5} & \cancel{8} & \cancel{4} & & & \\
 & & & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{2} & & \\
 & & & & \cancel{5} & \cancel{4} & \cancel{6} & \cancel{3} & \\
 & & & & 4 & 8 & 6 & 9 & 5 \\
 & & & \times & & 5 & 9 & 4 & 7 \\
\hline
 & & & 3 & 4 & 0 & 8 & 6 & 5 \\
 & & 1 & 9 & 4 & 7 & 8 & 0 & \\
 & 4 & 3 & 8 & 2 & 5 & 5 & & \\
2 & 4 & 3 & 4 & 7 & 5 & & & \\
\hline
2 & 8 & 9 & 5 & 8 & 9 & 1 & 6 & 5
\end{array}
$$

Números Decimales

Cuarto Nivel de Abstracción

Recorrer las columnas numéricas de derecha a izquierda

Multiplicar por 10

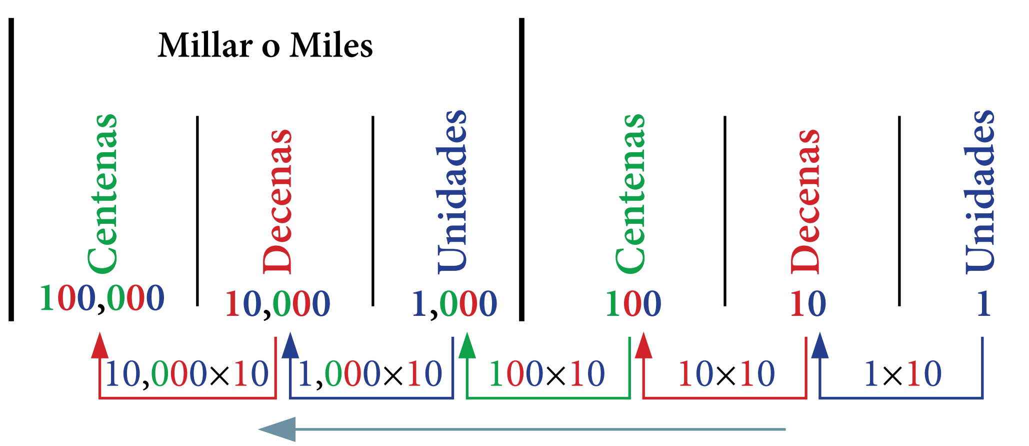
Al sistema de numeración le llamamos *decimal* porque está basado en el número 10, ya que utilizamos los dedos de las manos para crear los 10 símbolos que construyen todos los números naturales.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Porque el sistema de numeración decimal tiene 10 símbolos, también se llama sistema de numeración base 10.

Por lo cual, cuando pasamos de la columna de las unidades a la columna de las decenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 decena tiene 10 unidades.

Cuando pasamos de la columna de las decenas a la columna de las centenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 centena tiene 10 decenas.

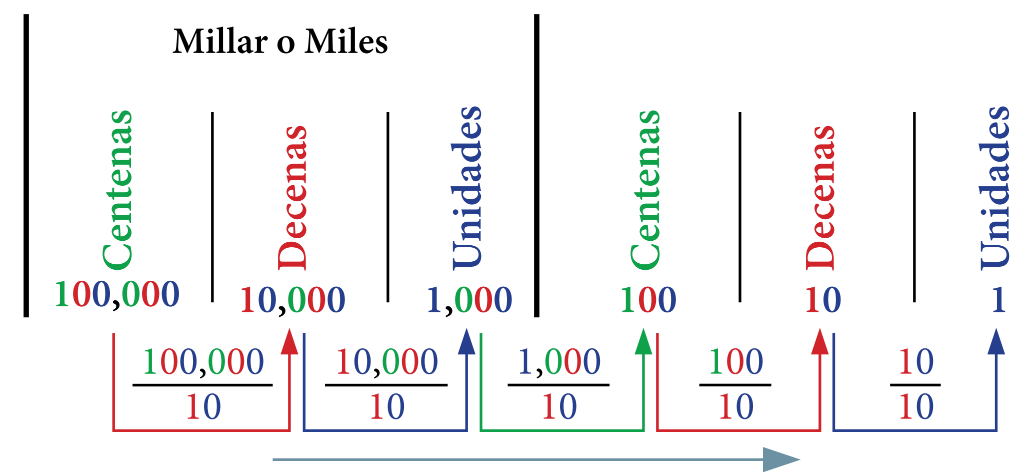


Recorriendo las columnas numéricas de *derecha* a *izquierda* **multiplicamos** por 10.

Recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha

Dividir entre 10

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual, al recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha, dividimos entre 10.



Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

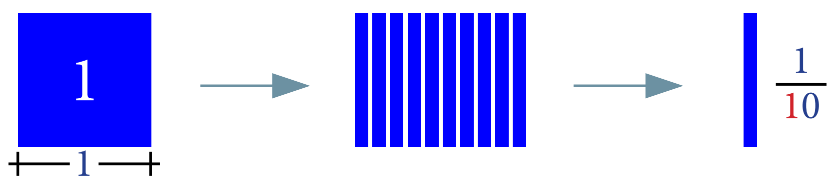
Crear columnas a la derecha de las unidades

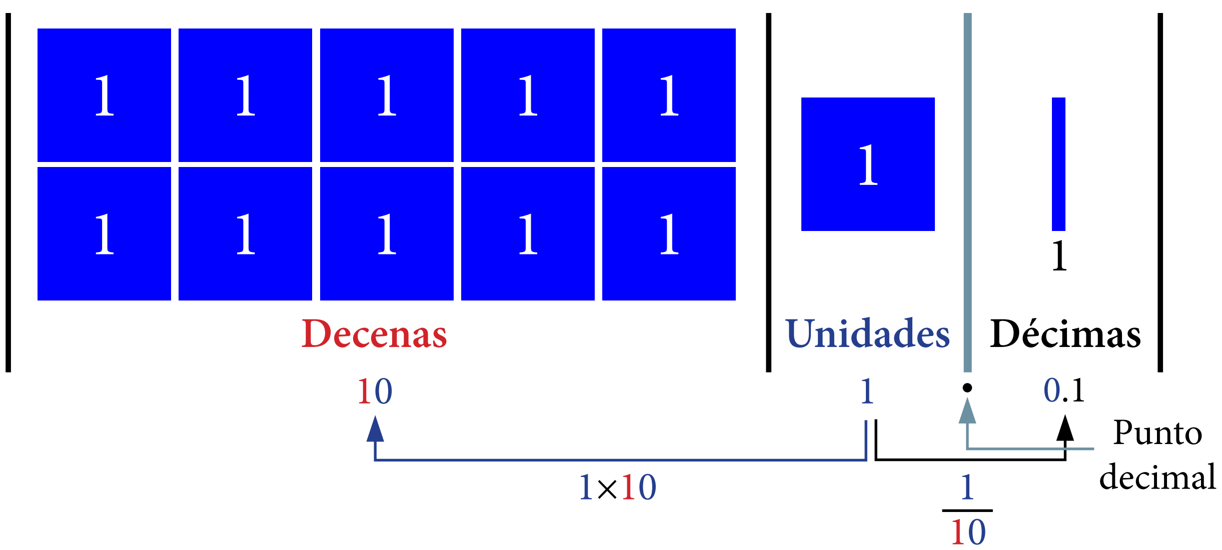
Columna de las décimas

Si queremos crear una columna a la *derecha* de la columna de las unidades, recorremos las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha*, por lo cual *dividimos* la unidad entre 10.

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

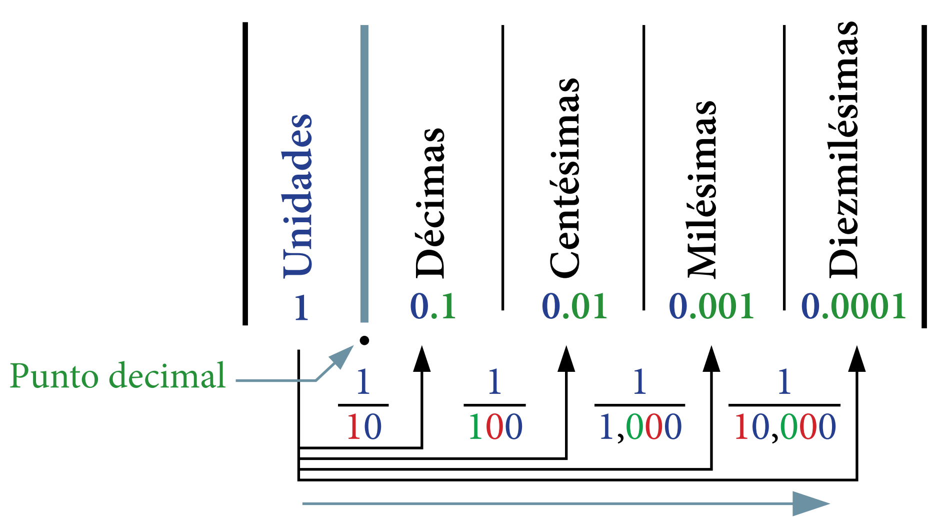
Utilizando los conceptos de división y de fracción, hemos dividido en 10 partes iguales la unidad, cada parte es *una* de *diez* o 1 décimo de la unidad.





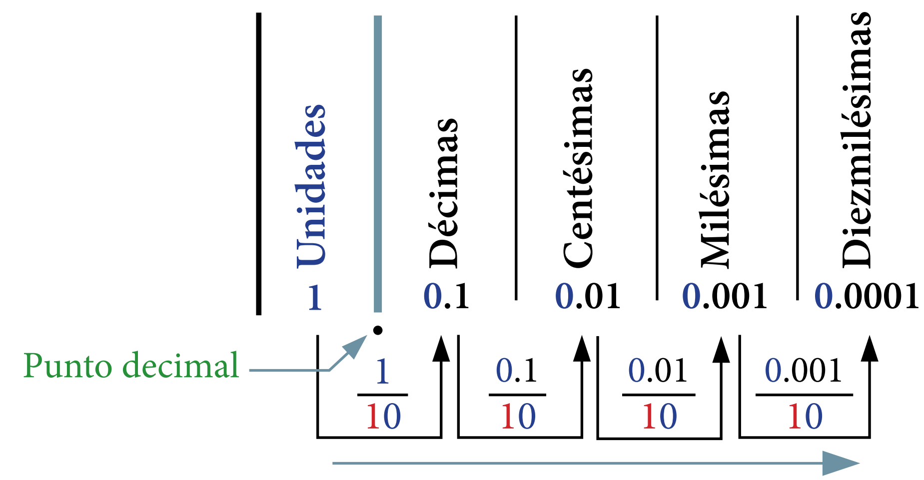
Punto decimal

El *punto decimal* nos permite diferenciar las columnas numéricas a la *izquierda* de la columna de las unidades y las columnas numéricas a la *derecha* de la columna de las unidades.



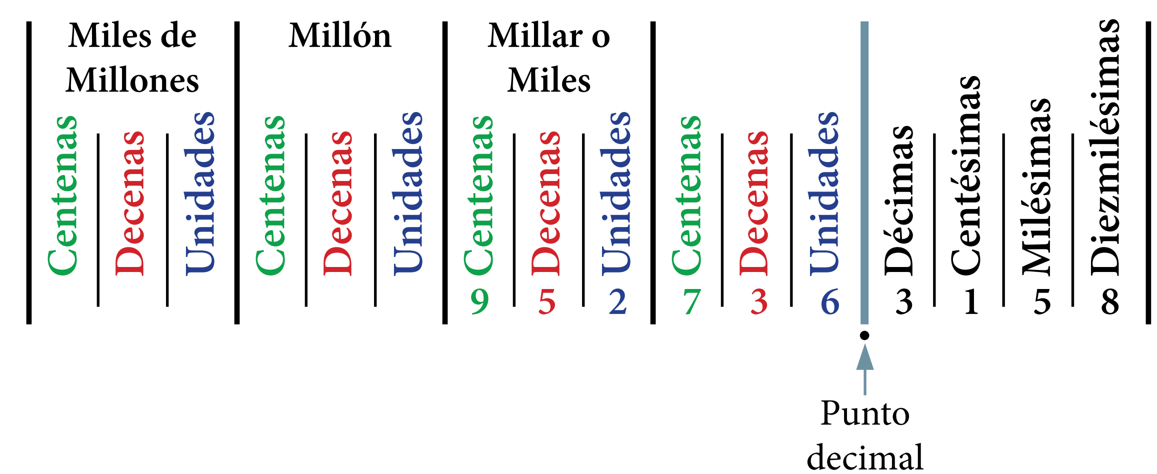
Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

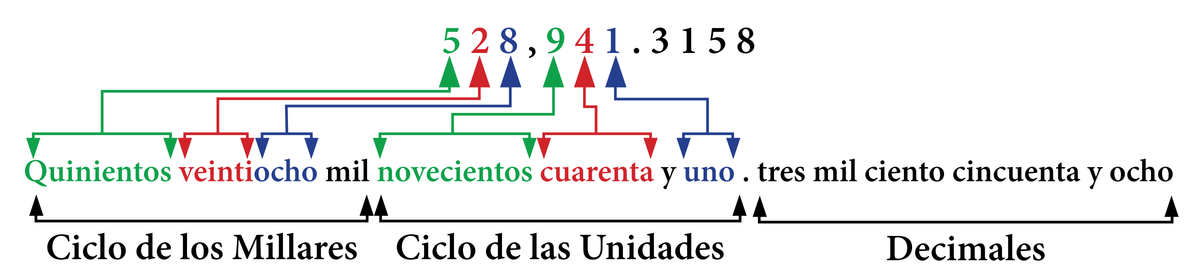
Utilizando notación decimal la división entre 10 podemos expresarla de la siguiente manera.



Columnas numéricas con decimales

A los dígitos a la *derecha* del punto decimal les llamamos *decimales*, porque al recorrer las columnas de *izquierda* a *derecha*, la unidad de la columna que se encuentra a la *derecha* es una *décima* de la unidad de la columna que se encuentra a la *izquierda*.

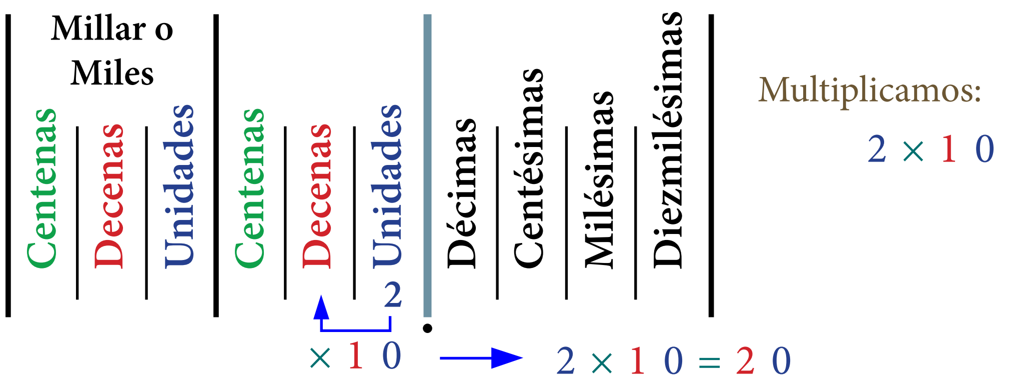




Todas las columnas numéricas, tanto a la derecha como a la izquierda del punto decimal, se comportan exactamente de la misma manera.

Multiplicar un número natural por 10

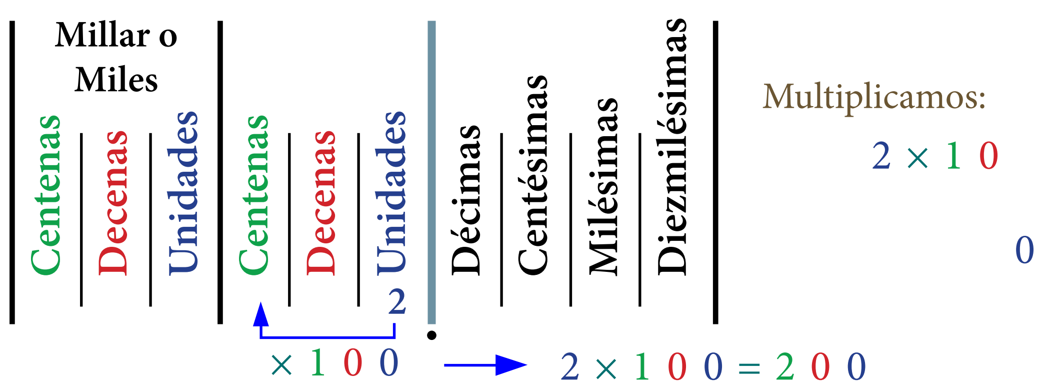
Utilizando la dinámica básica del sistema de numeración decimal, descubrimos que multiplicar un número natural por 10, es equivalente a recorrerlo una columna a la izquierda, ya que la columna de la izquierda es 10 veces mayor que la columna de la derecha.



Multiplicar un número por 10 es equivalente a aumentar al número un 0.

Multiplicar un número natural por 100

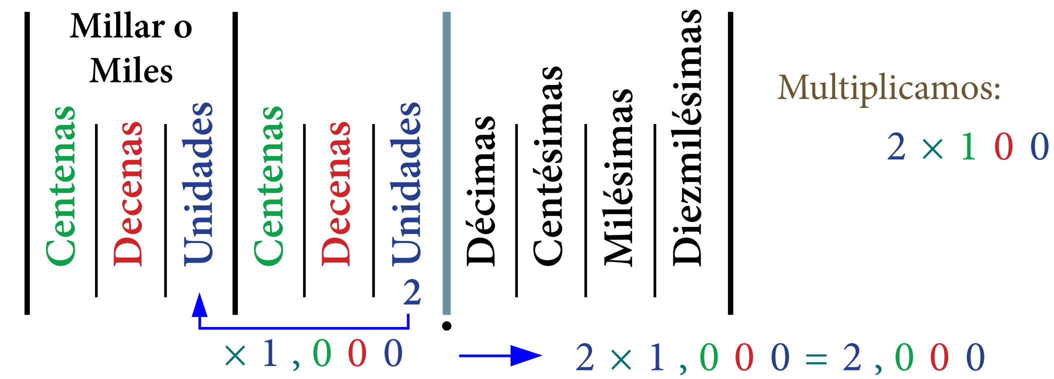
Multiplicar un número por 100 significa mover el número dos columnas a la izquierda, ya que 100 = 10 × 10.



Multiplicar un número por 100 es equivalente a aumentar al número dos 0.

Multiplicar un número natural por 1,000

Multiplicar un número por 1,000 significa mover el número tres columnas a la izquierda, ya que 1,000 = 10 × 10 × 10.

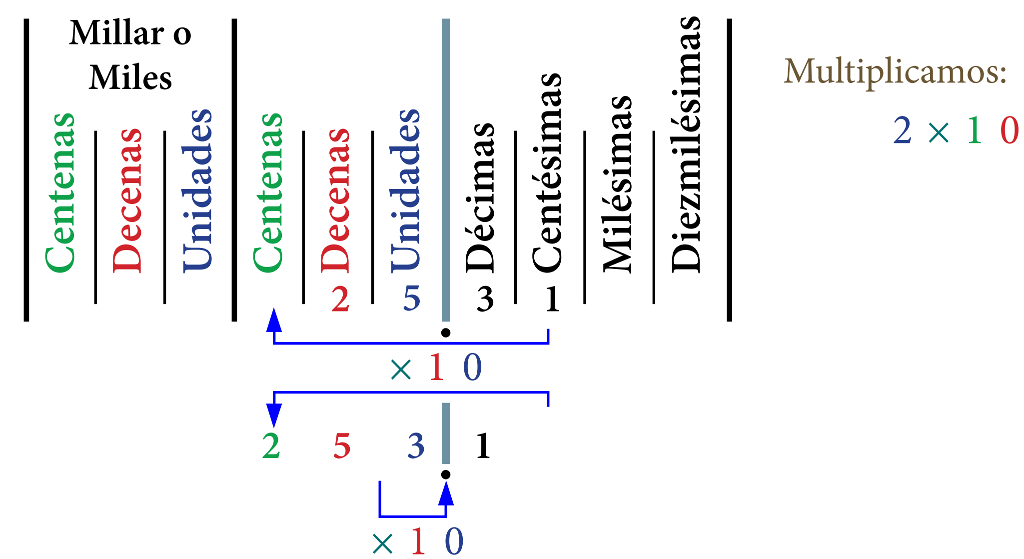


Multiplicar un número por 1,000 es equivalente a aumentar al número tres 0.

Y así sucesivamente para cualquier multiplicación.

Multiplicar un número decimal por 10

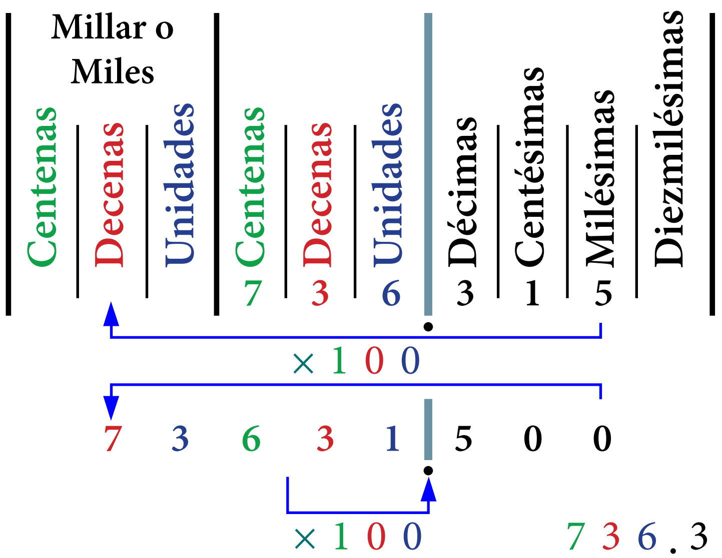
Para multiplicar un número decimal por 10, seguimos el mismo procedimiento, recorremos el número una columna hacia la izquierda.



Multiplicar un número en notación decimal por 10, es equivalente a recorrer el punto decimal un dígito a la derecha.

Multiplicar un número decimal por 100

Multiplicar un número por 100 significa mover el número dos columnas a la izquierda, ya que $100 = 10 \times 10$.



Multiplicamos:

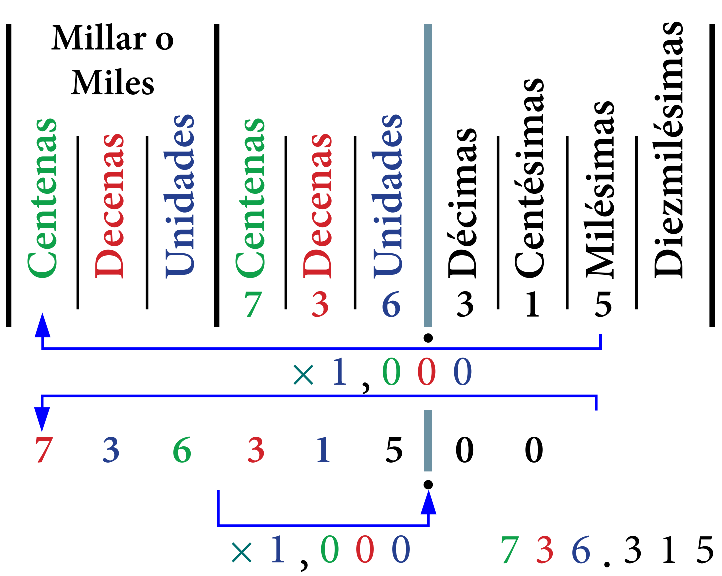
736.315×100

$736.315 \times 100 = 73{,}631.5$

Multiplicar un número en notación decimal por 100, es equivalente a recorrer el punto decimal dos dígitos a la derecha.

Multiplicar un número decimal por 1,000

Multiplicar un número por 1,000 significa mover el número dos columnas a la izquierda, ya que $1{,}000 = 10 \times 10 \times 10$.



Multiplicamos:

$736.315 \times 1{,}000$

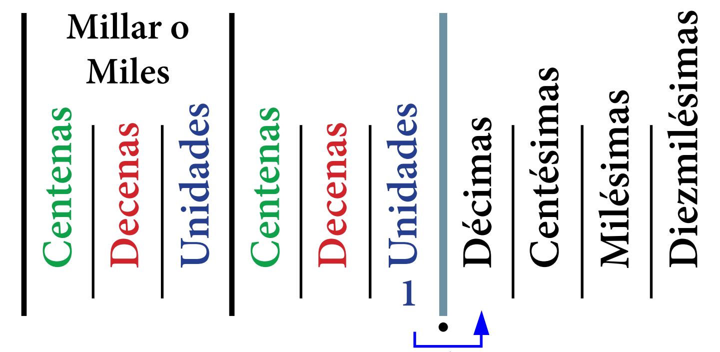
$736.315 \times 1{,}000 = 736{,}315.0$

Multiplicar un número en notación decimal por 1,000, es equivalente a recorrer el punto decimal tres dígitos a la derecha.

Y así sucesivamente para cualquier multiplicación de números con decimales.

Multiplicar un número natural por 0.1

Dividir el número 1 entre 10, es equivalente a recorrer el número una columna a la derecha.



Multiplicamos:

1×0.1

$\frac{1}{10} = 0.1$

$1 \times 0.1 = 0.1$

Dividimos 1 entre 10 y obtenemos: 0.1.

Por lo tanto: $\frac{1}{10} = 0.1$

Ahora bien, si multiplicamos: $1 \times 0.1 = 0.1$

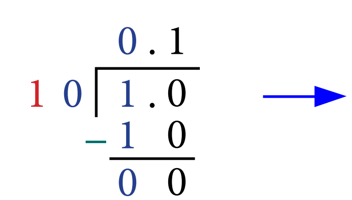
También obtenemos 0.1.

Descubrimos que dividir entre 10, es lo mismo que multiplicar por 0.1, ya que: $\frac{1}{10} = 0.1$

Utilizando la división con el algoritmo de la casita, podemos también comprobar que: $\frac{1}{10} = 0.1$

Para efectuar la división de 1 entre 10, a la derecha del 1 escribimos el punto decimal por aparece en las columnas numéricas.

Las columnas numéricas a la derecha del punto decimal están vacías, lo cual lo indicamos escribiendo 0.



$\frac{1}{10} = 0.1$

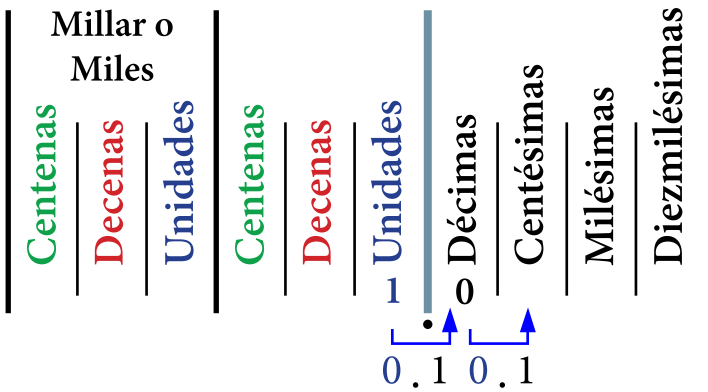
Por lo tanto, multiplicar por 0.1 es equivalente a dividir entre 10.

Recorrer el número una columna a la izquierda es multiplicarlo por 10, recorrerlo a la derecha es dividirlo entre 10, que es lo mismo que multiplicar por 0.1.

Multiplicar un número natural por 0.01

Dividir el número 1 entre 10, es equivalente a recorrer el número una columna a la derecha.

Para multiplicar 1 por 0.01 recorremos el número dos columnas a la derecha, ya que $0.01 = 0.1 \times 0.1$, lo cual es equivalente a dividir entre 100.



Multiplicamos:

1×0.01

$$1 \times 0.01 = \frac{1}{100}$$

$$1 \times 0.01 = \frac{1}{100} = 0.01$$

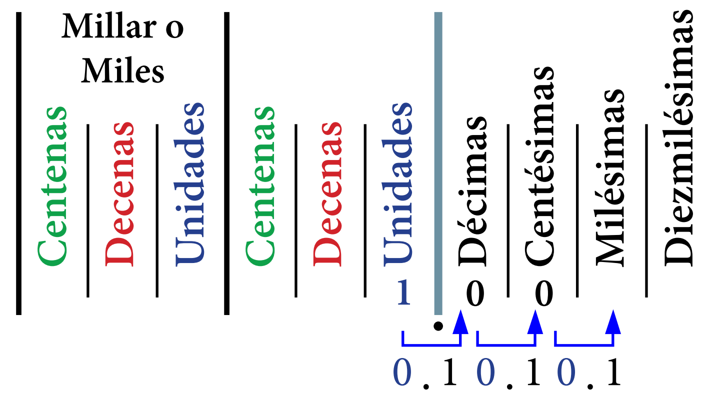
$$1 \times 0.01 = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

Para comprobar el resultado utilizamos el algoritmo de la casita para efectuar la división.

$$\begin{array}{r|l} & 0.01 \\ \cline{2-2} 100 & 1.00 \\ & -1\;00 \\ & 0\;00 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 1 \times 0.01 = \frac{1}{100} = 0.01$$

Multiplicar un número natural por 0.001

Para multiplicar 1 por 0.001 recorremos el número tres columnas a la derecha, ya que $0.001 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1$, lo cual es equivalente a dividir entre 1,000.



Multiplicamos:

1×0.001

$$1 \times 0.001 = \frac{1}{1{,}000}$$

$$1 \times 0.001 = \frac{1}{1{,}000} = 0.001$$

$$1 \times 0.001 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.001$$

Para comprobar el resultado utilizamos el algoritmo de la casita para efectuar la división.

$$\begin{array}{r|l} & 0.001 \\ \cline{2-2} 1{,}000 & 1.000 \\ & -1\;000 \\ & 0\;000 \end{array} \quad \longrightarrow \quad 1 \times 0.001 = \frac{1}{1{,}000} = 0.001$$

Acomodamos los resultados que hemos obtenido.

$$1 \times 0.1 = \frac{1}{10} = 0.1 \quad \rightarrow \quad 1 \times 0.1 = 0.1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{10} = 0.1$$

$$1 \times 0.01 = \frac{1}{100} = 0.01 \quad \rightarrow \quad 1 \times 0.01 = 0.01$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{100} = 0.01$$

$$1 \times 0.01 = 0.1 \times 0.1 = 0.01$$

$$1 \times 0.001 = \frac{1}{1,000} = 0.001 \quad \rightarrow \quad 1 \times 0.001 = 0.001$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{1,000} = 0.001$$

$$1 \times 0.001 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.001$$

Analizamos la multiplicación de dos números decimales.

$$\underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} \times \underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} = \underbrace{0.01}_{\substack{2 \\ \text{Decimales}}}$$

Multiplicamos dos números con 1 decimal cada uno y el resultado es un número con 2 decimales.

$$\underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} \times \underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} \times \underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} \times = \underbrace{0.001}_{\substack{3 \\ \text{Decimales}}}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, multiplicamos tres números con 1 decimal cada uno, el resultado es un número con 3 decimales.

$$\underbrace{0.1}_{\substack{1 \\ \text{Decimal}}} \times \underbrace{0.01}_{\substack{2 \\ \text{Decimales}}} = \underbrace{0.001}_{\substack{3 \\ \text{Decimales}}}$$

Multiplicamos dos números uno con 1 decimal y otro con 2 decimales, el resultado es un número con 3 decimales.

Cuando multiplicamos dos números con decimales, efectuamos la multiplicación sin tomar en cuenta el punto decimal y al resultado le asignamos tantos decimales como sea la suma de los decimales del multiplicando y el multiplicador.

Octavo paso

Multiplicaciones de números en notación decimal

Cuando multiplicamos dos números con decimales, efectuamos la multiplicación sin tomar en cuenta el punto decimal y al resultado le asignamos tantos decimales como sea la suma de los decimales del multiplicando y el multiplicador.

$$\begin{array}{r} 263.48 \\ \times \quad 7.5 \\ \hline 131740 \\ 184436 \\ \hline 1,976.100 \end{array} \quad \text{3 decimales}$$

3 decimales

$$\begin{array}{r} 486.95 \\ \times \quad 59.47 \\ \hline 340865 \\ 194780 \\ 438255 \\ 243475 \\ \hline 28,958.9165 \end{array} \quad \text{4 decimales}$$

4 decimales

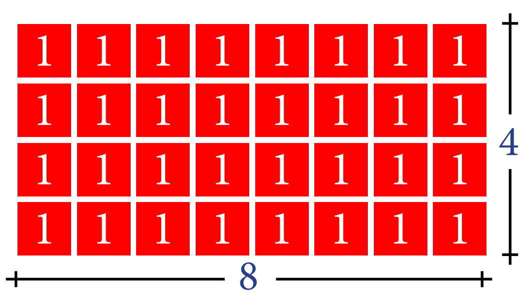
La Multiplicación y la División Son Operaciones Inversas

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Construcción de las tablas de multiplicar y dividir

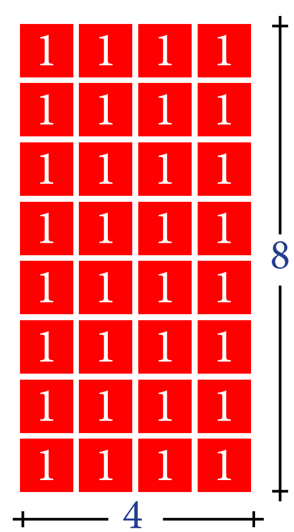
Tablas de multiplicar

Uniendo cuadritos formamos un área.



Área = 32

$8 \times 4 = 32$

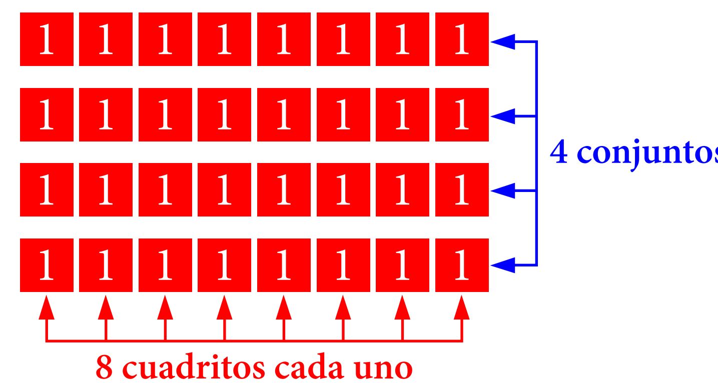


Área = 32

$4 \times 8 = 32$

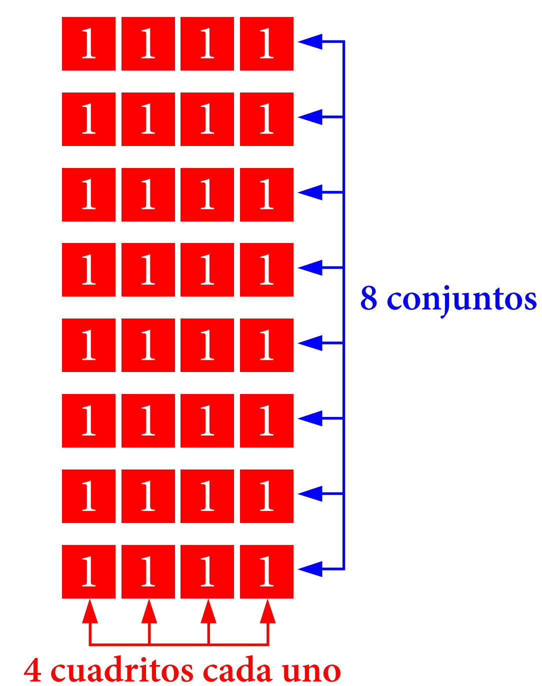
Tablas de dividir

Separando el área en áreas más pequeñas construimos las tablas de dividir.



Área = 32

$$\frac{32}{4} = 8$$



Área = 32

$$\frac{32}{8} = 4$$

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Tablas de multiplicar

Multiplicamos la base 8 por la altura 4 del rectángulo.

Área = 32

$8 \times 4 = 32$ →

Tablas de dividir

Dividimos el área en 4 áreas con 8 cuadritos cada una.

Área = 32

$$\frac{32}{4} = 8$$

Multiplicamos la base 4 por la altura 8 del rectángulo.

Área = 32

$4 \times 8 = 32$ →

Dividimos el área en 8 áreas con 4 cuadritos cada una.

Área = 32

$$\frac{32}{8} = 4$$

$$\frac{32}{8} = 4$$

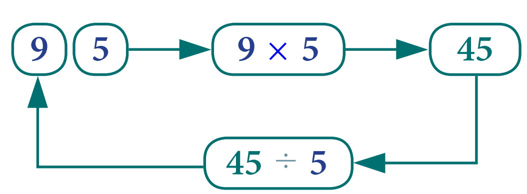
$$4 \times 8 = 32$$

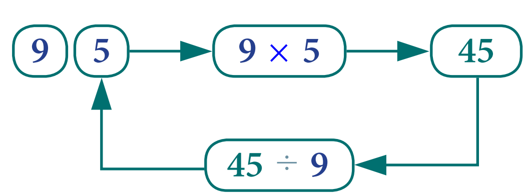
$$4 \times 8 = 32$$

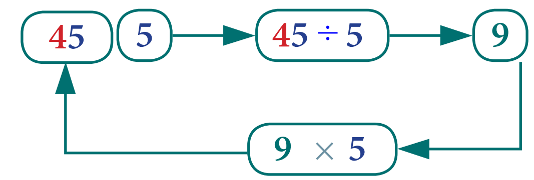
$$\frac{32}{4} = 8$$

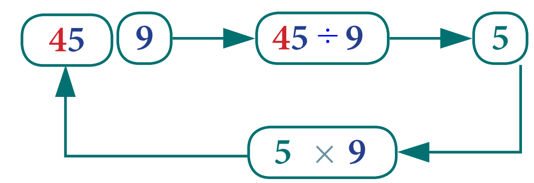
$$8 \times 4 = 32$$

$$8 \times 4 = 32$$









Capítulo 5

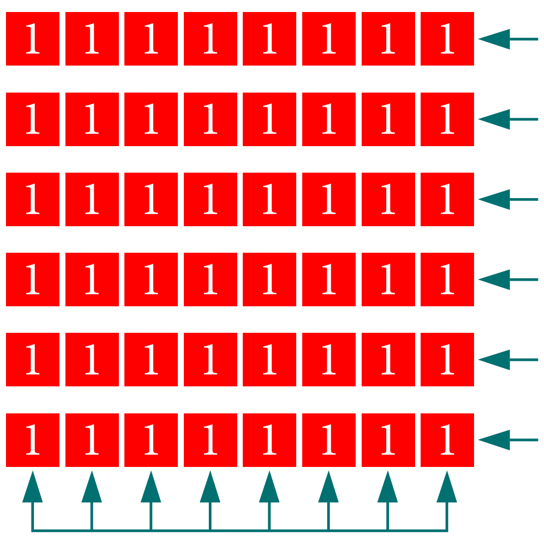
Operaciones Básicas
División

División

Tercer Nivel de Abstracción

Concepto de división

La división es la operación inversa de la multiplicación. En la multiplicación agrupamos o sumamos los cuadritos que forman el **área**, en la división los separamos o dividimos en áreas más pequeñas.



6 Áreas

$8 \times 6 = 48 \rightarrow \frac{48}{6} = 8$

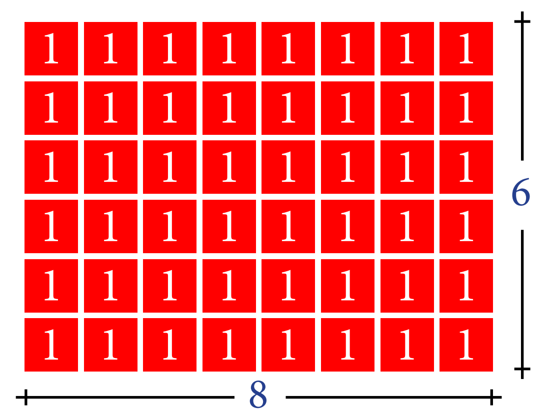
de 8 cuadritos cada una.

Área total.

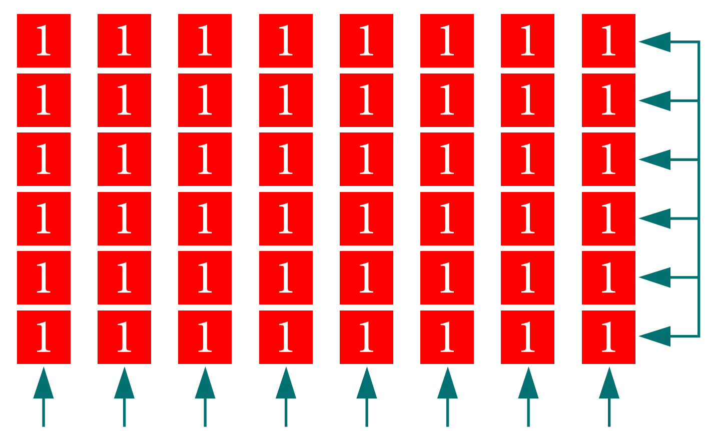
$8 \times 6 = 48 \rightarrow \frac{48}{6} = 8$

Tamaño de cada una de las áreas formadas.

Número de áreas formadas.



Área = 48
$8 \times 6 = 48$



de 6 cuadritos cada una.

8 Áreas

Área total.

$8 \times 6 = 48 \rightarrow \frac{48}{8} = 6$

Tamaño de cada una de las áreas formadas.

Número de áreas formadas.

Notación de división

Para representar la división de dos números, se puede hacer de dos maneras diferentes: utilizando notación de fracción o el símbolo de división ÷.

Dividendo. → $\dfrac{48}{6} = 8$ ← Cociente.
Divisor. →

Notación de Fracción.

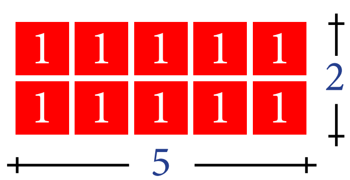
Dividendo. ↘ ↙ Divisor.

$48 \div 6 = 8$ ← Cociente.

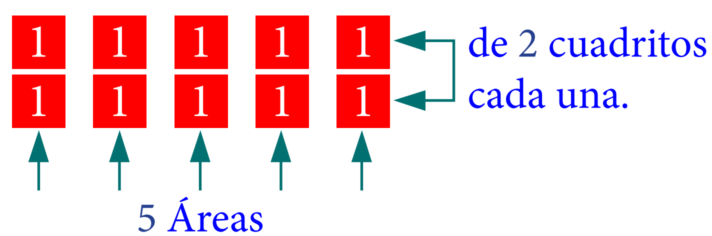
Notación con el Símbolo de División.

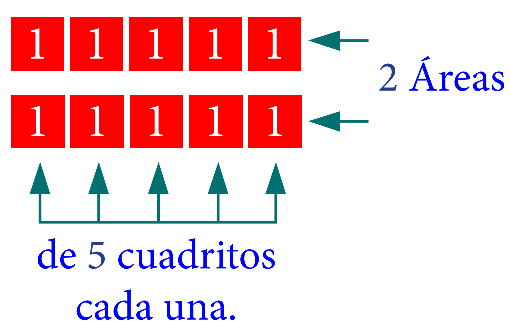
Tablas de dividir

Para construir las tablas de dividir utilizamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.



Área = 10
$5 \times 2 = 10$





$5 \times 2 = 10 \rightarrow \dfrac{10}{5} = 2$

$5 \times 2 = 10 \rightarrow \dfrac{10}{2} = 5$

De esta forma construimos todas las tablas de dividir. De hecho, las tablas de dividir y multiplicar son las mismas, lo único que cambia es la forma como las leemos.

Podemos también utilizar las tablas de referencia de rápida de la multiplicación para construir las tablas de dividir.

Leemos la división de dentro hacia fuera.

Por ejemplo:

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81

$\dfrac{56}{8} = 7$

$\dfrac{56}{7} = 8$

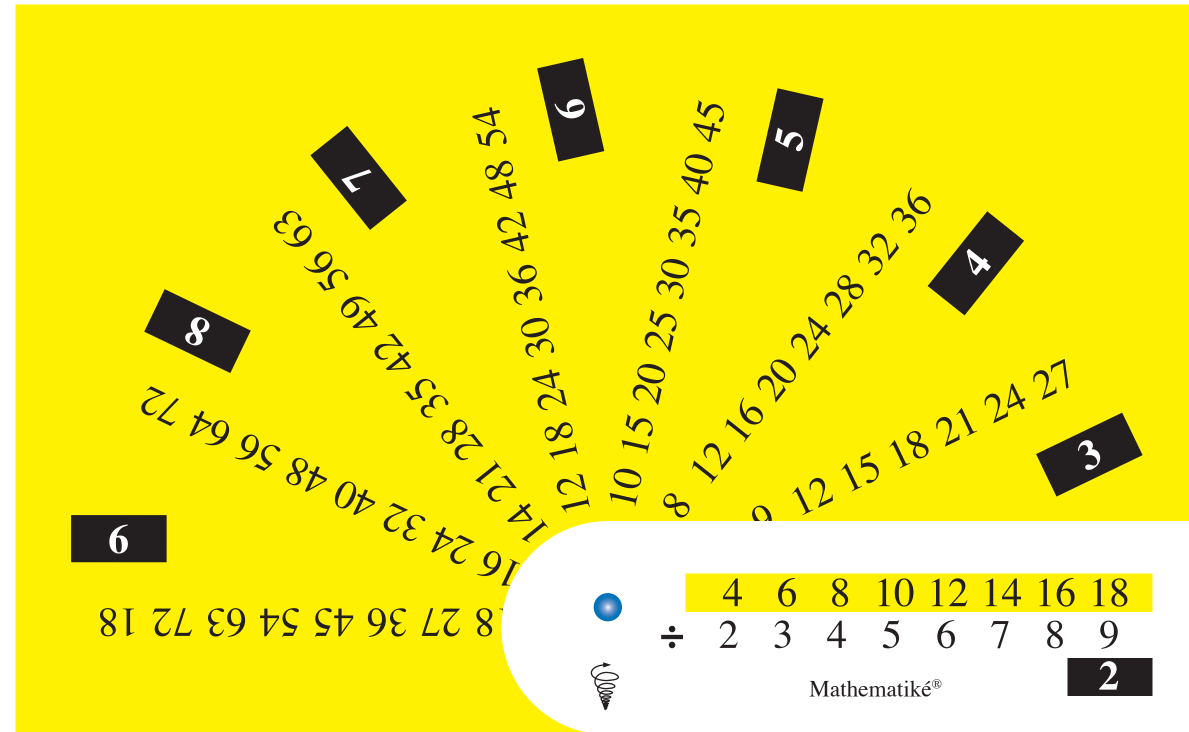
Utilizando los cuadritos del material didáctico construimos las tablas de dividir.

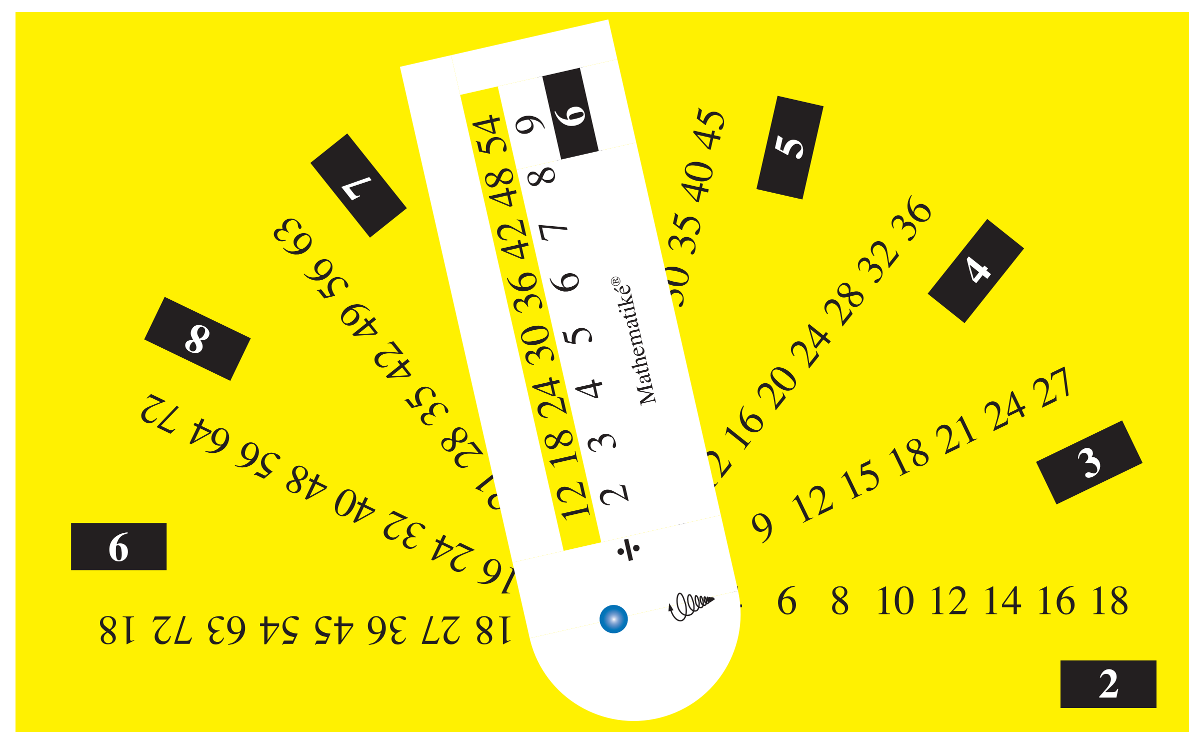
2 ÷ 2 = 1	3 ÷ 3 = 1	4 ÷ 4 = 1	5 ÷ 5 = 1
4 ÷ 2 = 2	6 ÷ 3 = 2	8 ÷ 4 = 2	10 ÷ 5 = 2
6 ÷ 2 = 3	9 ÷ 3 = 3	12 ÷ 4 = 3	15 ÷ 5 = 3
8 ÷ 2 = 4	12 ÷ 3 = 4	16 ÷ 4 = 4	20 ÷ 5 = 4
10 ÷ 2 = 5	15 ÷ 3 = 5	20 ÷ 4 = 5	25 ÷ 5 = 5
12 ÷ 2 = 6	18 ÷ 3 = 6	24 ÷ 4 = 6	30 ÷ 5 = 6
14 ÷ 2 = 7	21 ÷ 3 = 7	28 ÷ 4 = 7	35 ÷ 5 = 7
16 ÷ 2 = 8	24 ÷ 3 = 8	32 ÷ 4 = 8	40 ÷ 5 = 8
18 ÷ 2 = 9	27 ÷ 3 = 9	36 ÷ 4 = 9	45 ÷ 5 = 9

6 ÷ 6 = 1	7 ÷ 7 = 1	8 ÷ 8 = 1	9 ÷ 9 = 1
12 ÷ 6 = 2	14 ÷ 7 = 2	16 ÷ 8 = 2	18 ÷ 9 = 2
18 ÷ 6 = 3	21 ÷ 7 = 3	24 ÷ 8 = 3	27 ÷ 9 = 3
24 ÷ 6 = 4	28 ÷ 7 = 4	32 ÷ 8 = 4	36 ÷ 9 = 4
30 ÷ 6 = 5	35 ÷ 7 = 5	40 ÷ 8 = 5	45 ÷ 9 = 5
36 ÷ 6 = 6	42 ÷ 7 = 6	48 ÷ 8 = 6	54 ÷ 9 = 6
42 ÷ 6 = 7	49 ÷ 7 = 7	56 ÷ 8 = 7	63 ÷ 9 = 7
48 ÷ 6 = 8	56 ÷ 7 = 8	64 ÷ 8 = 8	72 ÷ 9 = 8
54 ÷ 6 = 9	63 ÷ 7 = 9	72 ÷ 8 = 9	81 ÷ 9 = 9

Tabla de referencia rápida de la división

El uso de la tabla de referencia rápida de la división les ayuda a los estudiantes a memorizar las tablas de dividir y multiplicar.





Algoritmo de la División

Tercer Nivel de Abstracción

Primer paso

Formas de escribir las divisiones

Existen dos formas de efectuar la división de dos cantidades: en forma de fracción y utilizando el símbolo de la casita.

$$42 \div 7 = 6$$

Numerador o dividendo.

Denominador o divisor.

$$\frac{42}{7} = 6$$

Notación de fracción.

Divisor.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 7\overline{\smash{)}42} \end{array}$$

Dividendo.

La casita.
División larga.

Segundo paso

Encontrar el número menor más cercano

El algoritmo de la división, es el primer procedimiento que aprendemos para hacer operaciones, en el cual tenemos que tomar decisiones.

Cuando dividimos dos números y el resultado no está en las tablas de dividir, es decir, el resultado no es exacto, entonces tenemos que encontrar el número menor más cercano cuyo resultado sí está en las tablas.

Dividir: $27 \div 4$

El número menor más cercano a 27 que se divide en forma exacta entre 4 es 24.

$$24 \div 4 = 6$$

Para efectuar la división utilizando la notación de fracción, descomponemos el número 27 en $24 + 3$.

$$\frac{27}{4} = \frac{24+3}{4} = \frac{24}{4} + \frac{3}{4} = 6 + \frac{3}{4} = 6\,\frac{3}{4}$$

Notación mixta.

Residuo.

Para efectuar la división utilizando la casita, seguimos el mismo procedimiento. Multiplicamos 6×4 y el resultado lo restamos a 27.

$$\begin{array}{r} 6 \\ 4\overline{\smash{)}27} \\ -24 \\ \hline 3 \end{array}$$

$\times$

$=$

$$R = 6 + \frac{3}{4} = 6\,\frac{3}{4}$$

Residuo.

El residuo es $\frac{3}{4}$ porque 3 aún tiene que ser dividido entre 4.

Tercer paso

Todas las columnas numéricas se comportan de la misma manera

La división de un dígito o dígitos la efectuamos en la columna en la cual se encuentra y añadimos el número de ceros que se requiera.

Centenas de millar	Decenas de millar	Unidades de millar	Centenas	Decenas	Unidades
$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{8}{2} = 4$

$$\frac{8{,}000}{2} = 4{,}000$$

$$\frac{80}{2} = 40$$

$$\frac{80{,}000}{2} = 40{,}000$$

$$\frac{800}{2} = 400$$

$$\frac{800{,}000}{2} = 400{,}000$$

Cuarto Nivel de Abstracción

Cuarto paso

Descomponer el número y dividir empezando en la columna de la izquierda

Para dividir cualquier número, lo descomponemos de tal forma, que empezando por la columna de la izquierda, el número se divida en forma exacta entre el divisor.

La división la podemos hacer utilizando la notación de fracción o la casita. Si el residuo no es cero, el resultado se expresa como una fracción en notación mixta.

Hacemos la división en notación de fracción.

$$\frac{79}{5} = \frac{50+29}{5} = \frac{50+25+4}{5} = \frac{50}{5}+\frac{25}{5}+\frac{4}{5} = 10+5+\frac{4}{5} = 15\frac{4}{5}$$

Residuo.

Hacemos la división utilizando la casita comparando con la división en notación de fracción.

$$\frac{79}{5} = \frac{\boxed{50}+29}{5} = \frac{50+25+4}{5} = \boxed{\frac{50}{5}}+\frac{25}{5}+\frac{4}{5} = \boxed{10}+5+\frac{4}{5} = 15\frac{4}{5}$$

El número menor más cercano a 70 que se divide en forma exacta entre 5 es 50. Efectuamos la división.

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ 5 & \overline{)\,79} \end{array}$$

$$\frac{79}{5} = \frac{50+\boxed{29}}{5} = \frac{50+25+4}{5} = \frac{50}{5}+\frac{25}{5}+\frac{4}{5} = 10+5+\frac{4}{5} = 15\frac{4}{5}$$

Efectuamos la multiplicación y restamos. Obtenemos 29.

$$\begin{array}{rl} & 1 \\ 5 & \overline{)\,79} \\ & -5 \\ \hline & \boxed{29} \end{array}$$

$$\frac{79}{5} = \frac{50+\boxed{29}}{5} = \frac{50+25+4}{5} = \frac{50}{5}+\boxed{\frac{25}{5}}+\frac{4}{5} = 10+\boxed{5}+\frac{4}{5} = 15\frac{4}{5}$$

El número menor más cercano a 29 que se divide en forma exacta entre 5 es 25. Efectuamos la división.

$$\begin{array}{rl} & 15 \\ 5 & \overline{)\,79} \\ & -5 \\ \hline & 29 \end{array}$$

$$\frac{79}{5} = \frac{50+29}{5} = \frac{50+25+4}{5} = \frac{50}{5}+\frac{25}{5}+\frac{4}{5} = 10+5+\boxed{\frac{4}{5}} = 15\frac{4}{5}$$

Efectuamos la multiplicación y restamos. Obtenemos el residuo.

$$\begin{array}{rl} & 15 \\ 5 & \overline{)\,79} \\ & -5 \\ \hline & 29 \\ & -25 \\ \hline & \boxed{4} \end{array} \qquad \frac{4}{5}$$

Residuo.

$$R = 15 + \frac{4}{5} = 15\frac{4}{5}$$

Efectuamos la división 979 ÷ 4 utilizando notación de fracción y la casita.

El número menor más cercano a 9 que se divide en forma exacta entre 4 es 8.

$$\begin{array}{r} 9\,7\,9 \\ \hline 4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}l} & 2 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \end{array}$$

Descomponemos 979 en: 800 + 179.

$$\frac{979}{4} = \frac{800 + 179}{4} \longrightarrow = \begin{array}{r@{\,}r} & 2 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ - & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \end{array}$$

1 es menor a 4, por lo cual, tomamos 17.
El número más cercano menor a 17 que se divide en forma exacta entre 4 es 16.

$$\frac{979}{4} = \frac{800 + 179}{4} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}r} & 2\,4 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \end{array}$$

Descomponemos 179 en: 160 + 19.

$$\frac{979}{4} = \frac{800 + 160 + 19}{4} \longrightarrow = \begin{array}{r@{\,}r} & 2\,4 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ - & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \\ - & 1\,6\,0 \\ \hline & 1\,9 \end{array}$$

1 es menor a 4, por lo cual, tomamos 19.
El número más cercano menor a 19 que se divide en forma exacta entre 4 es 16.

$$\frac{979}{4} = \frac{800 + 160 + 19}{4} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}r} & 2\,4\,4 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ - & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \\ - & 1\,6\,0 \\ \hline & 1\,9 \end{array}$$

Descomponemos 19 en: 16 + 3.

$$\frac{979}{4} = \frac{800 + 160 + 16 + 3}{4} \longrightarrow = \begin{array}{r@{\,}r} & 2\,4\,4 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ - & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \\ - & 1\,6\,0 \\ \hline & 1\,9 \\ - & 1\,6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Planteamos las sumas de fracciones.

$$\frac{979}{4} = \frac{800}{4} + \frac{160}{4} + \frac{16}{4} + \frac{3}{4} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}r} & 2\,4\,4 \\ 4 & \overline{)\,9\,7\,9} \\ - & 8\,0\,0 \\ \hline & 1\,7\,9 \\ - & 1\,6\,0 \\ \hline & 1\,9 \\ - & 1\,6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

Efectuamos las divisiones.

$$\frac{979}{4} = 200 + 40 + 4 + \frac{3}{4} = 244 + \frac{3}{4} = 244\frac{3}{4}$$

$$R = 244 + \frac{3}{4} = 244\frac{3}{4}$$

Residuo.

Números Fraccionarios y Decimales

Cuarto Nivel de Abstracción

Recorrer las columnas numéricas de derecha a izquierda

Multiplicar por 10

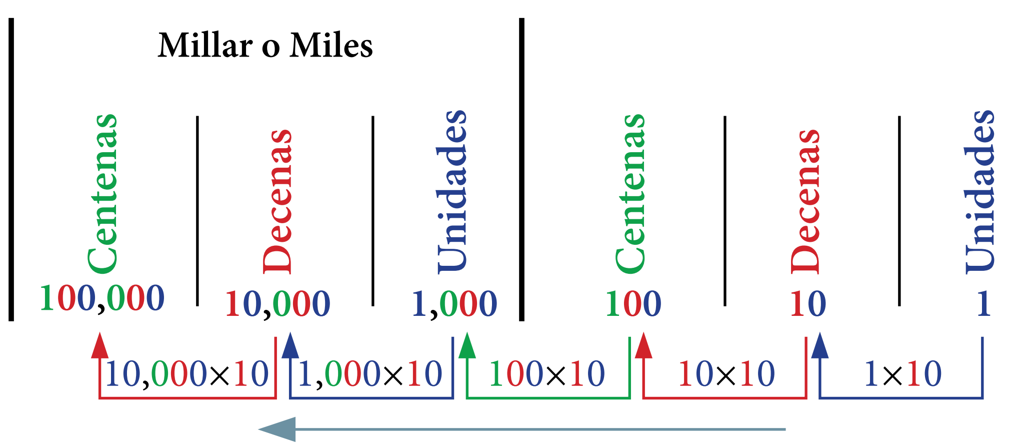
Al sistema de numeración le llamamos *decimal* porque está basado en el número 10, ya que utilizamos los dedos de las manos para crear los 10 símbolos que construyen todos los números naturales.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Porque el sistema de numeración decimal tiene 10 símbolos, también se llama sistema de numeración base 10.

Por lo cual, cuando pasamos de la columna de las unidades a la columna de las decenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 decena tiene 10 unidades.

Cuando pasamos de la columna de las decenas a la columna de las centenas, es equivalente a multiplicar por 10, ya que 1 centena tiene 10 decenas.

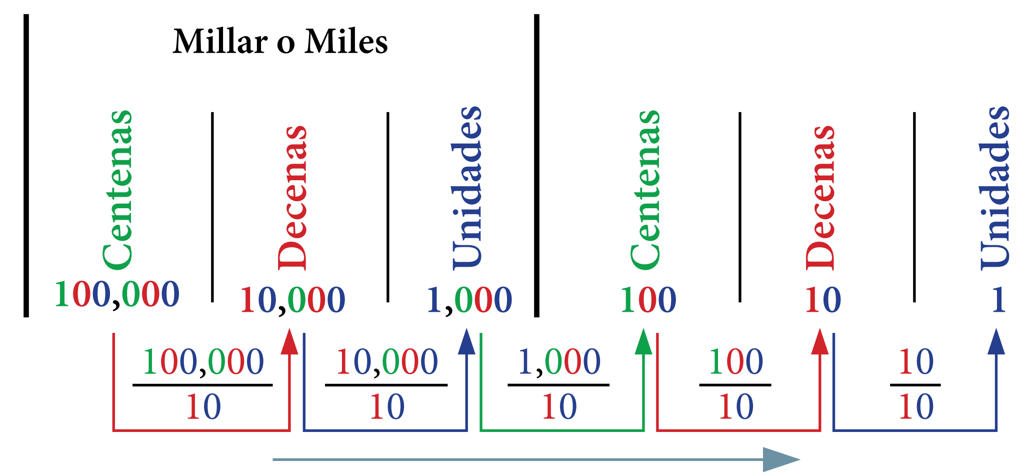


Recorriendo las columnas numéricas de *derecha* a *izquierda* **multiplicamos** por 10.

Recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha

Dividir entre 10

La división es la operación inversa de la multiplicación, por lo cual, al recorrer las columnas numéricas de izquierda a derecha, dividimos entre 10.



Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

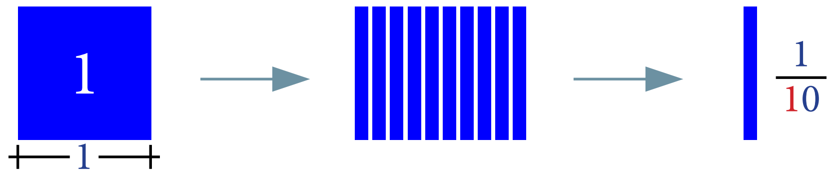
Crear columnas a la derecha de las unidades

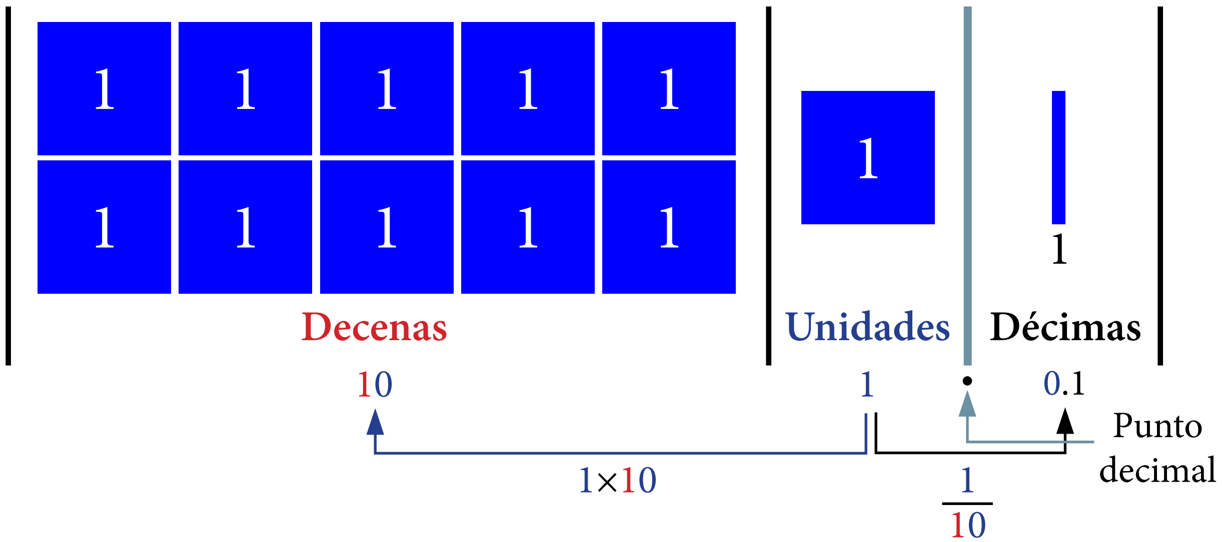
Columna de las décimas

Si queremos crear una columna a la *derecha* de la columna de las unidades, recorremos las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha*, por lo cual *dividimos* la unidad entre 10.

$$\frac{1}{10} = 0.1$$

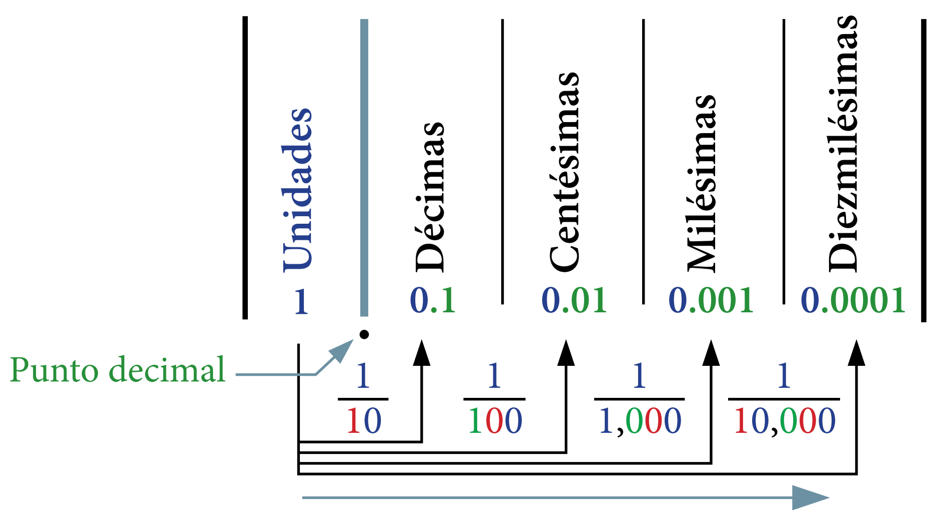
Utilizando los conceptos de división y de fracción, hemos dividido en 10 partes iguales la unidad, cada parte es *una* de *diez* o 1 décimo de la unidad.





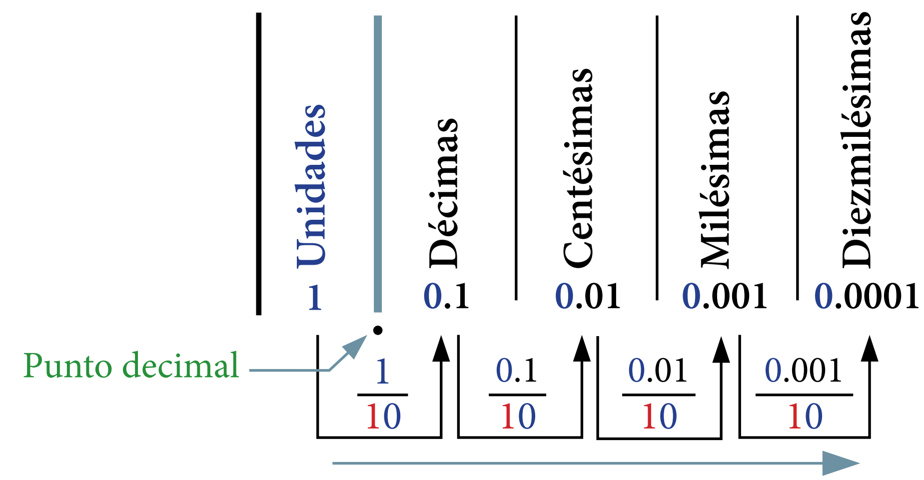
Punto decimal

El *punto decimal* nos permite diferenciar las columnas numéricas a la *izquierda* de la columna de las unidades y las columnas numéricas a la *derecha* de la columna de las unidades.



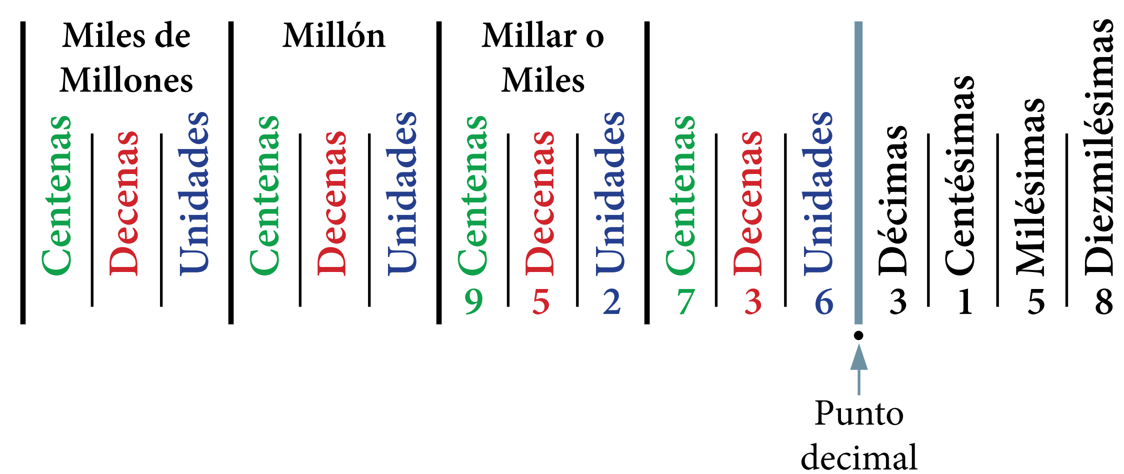
Recorriendo las columnas numéricas de *izquierda* a *derecha* **dividimos** entre 10.

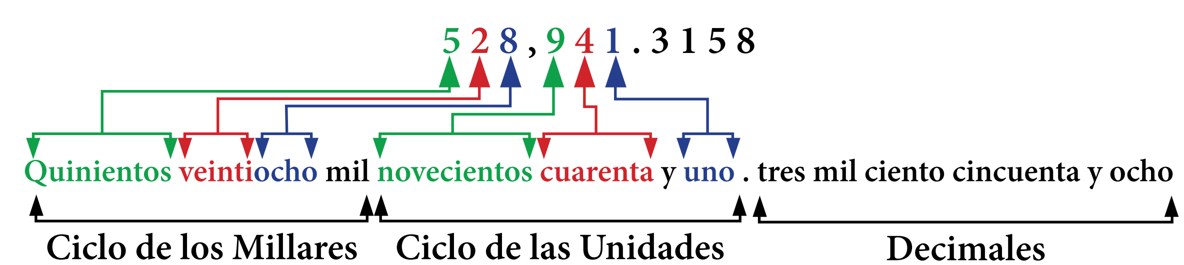
Utilizando notación decimal la división entre 10 podemos expresarla de la siguiente manera.



Columnas numéricas con decimales

A los dígitos a la *derecha* del punto decimal les llamamos *decimales*, porque al recorrer las columnas de *izquierda* a *derecha*, la unidad de la columna que se encuentra a la *derecha* es una *décima* de la unidad de la columna que se encuentra a la *izquierda*.



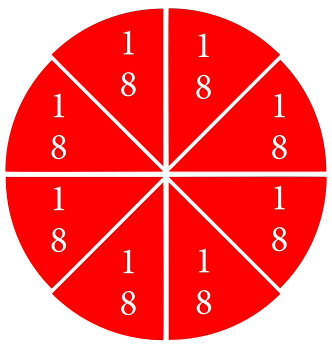


Todas las columnas numéricas, tanto a la derecha como a la izquierda del punto decimal, se comportan exactamente de la misma manera.

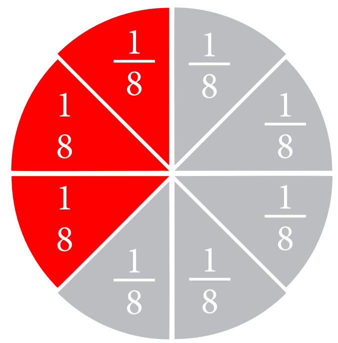
Notación de fracción y notación decimal

El valor de todas las fracciones que no son impropias es menor a uno, ya que el valor del numerador es menor que el del denominador.

Esta propiedad de las fracciones propias podemos fácilmente entenderlo y demostrarlo utilizando un círculo.

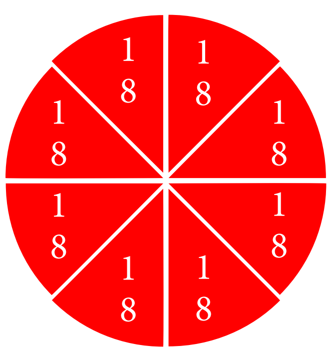


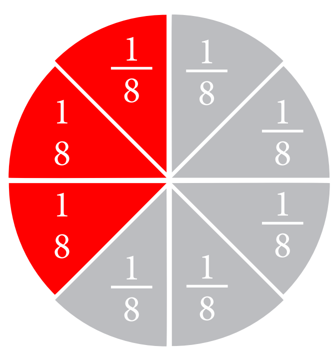
$\frac{8}{8} = 1$



$\frac{3}{8} < 1$

Cuando tenemos una fracción impropia, en la que el valor del numerador es mayor que el del denominador, podemos efectuar la división utilizando notación de fracción.





$$\frac{11}{8} = \frac{8+3}{8} = \frac{8}{8} + \frac{3}{8} = 1 + \frac{3}{8}$$

$$\frac{11}{8} = 1\,\frac{3}{8}$$

Expresamos el resultado como una fracción mixta ya que no podemos dividir el residuo.

Para expresar una fracción propia cuyo valor es menor de uno sin utilizar notación de fracción, tenemos que hacerlo en notación decimal.

La notación decimal consiste en utilizar las columnas numéricas que se encuentran a la derecha del punto decimal.

La notación decimal es una manera, que en la mayoría de los casos resulta inexacta, de expresar una fracción.

La notación decimal nos será muy útil cuando estudiemos el perímetro y el área de un círculo, ya que para calcularlos tendremos que utilizar el número π, el cual no es un número racional y no puede expresarse como una fracción. A este tipo de números les llamamos irracionales. La notación decimal también es útil cuando resolvemos algunos problemas de física y química.

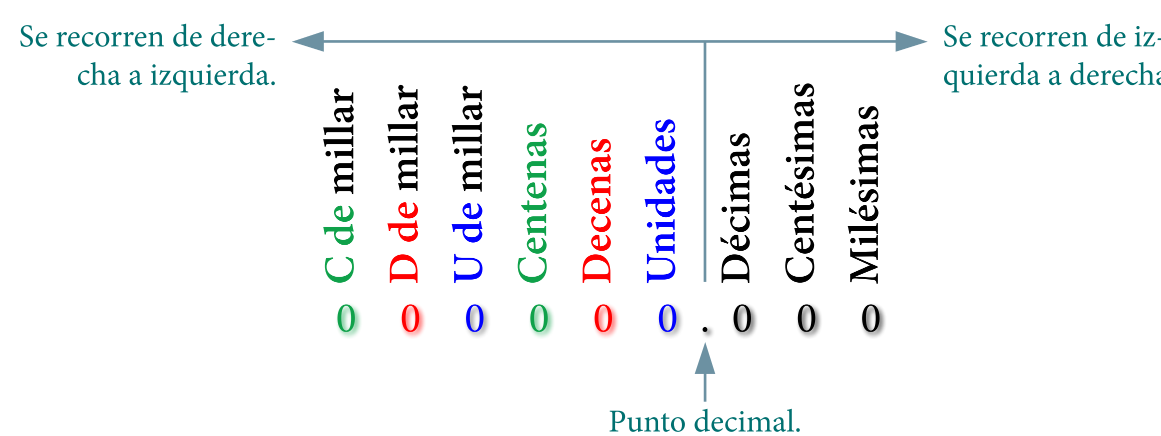
Quinto paso

Notación decimal

Para expresar una fracción que es menor de uno sin utilizar la notación de fracción, tenemos que hacerlo en notación decimal para lo cual tenemos que utilizar un punto, al que llamamos punto decimal, y añadir columnas numéricas a la derecha de la columna de las unidades.

Columnas numéricas con decimales

A los dígitos a la *derecha* del punto decimal les llamamos *decimales*, porque al recorrer las columnas de *izquierda* a *derecha*, la unidad de la columna que se encuentra a la *derecha* es una *décima* de la unidad de la columna que se encuentra a la *izquierda*.



Para dividir una fracción cuyo numerador es menor que el denominador, expresamos el numerador en notación decimal, es decir ponemos el punto decimal a la derecha de la columna de las unidades y realizamos la operación de la división utilizando la casita. Recordemos que una columna vacía se representa con el dígito 0.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.333 \qquad \frac{2}{7} = 0.2857$$

$$\begin{array}{r} 0.5 \\ 2\overline{)\,1.0} \\ -1\,0 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.333 \\ 3\overline{)\,1.0} \\ -\ \ 9 \\ \hline 10 \\ -\ \ 9 \\ \hline 10 \\ -\ \ 9 \\ \hline 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0.2857 \\ 7\overline{)\,2.0} \\ -1\,4 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 1 \end{array}$$

Utilizando la notación de fracción efectuamos la división. El resultado lo expresamos en notación de fracción mixta.

$$\frac{68}{9} = \frac{63+5}{9} = \frac{63}{9} + \frac{5}{9} = 7 + \frac{5}{9} = 7\frac{5}{9}$$

Expresar el residuo en notación decimal

Para cualquier división cuyo residuo no es cero, lo podemos expresar utilizando notación decimal.
Ponemos el punto decimal a la derecha del dígito de las unidades del dividendo y añadimos tantos ceros como queramos.

$$\begin{array}{r} 7.55555 \\ 9\overline{)\,68.00000} \\ -63 \\ \hline 050 \\ -45 \\ \hline 050 \\ -45 \\ \hline 050 \\ -45 \\ \hline 050 \\ -45 \\ \hline 050 \\ -45 \\ \hline 05 \end{array} \qquad R = 7.55555$$

$$\begin{array}{r} 68.85714 \\ 7\overline{)\,482.00000} \\ -42 \\ \hline 62 \\ -56 \\ \hline 60 \\ -56 \\ \hline 40 \\ -35 \\ \hline 50 \\ -49 \\ \hline 10 \\ -07 \\ \hline 30 \\ -28 \\ \hline 02 \end{array} \qquad R = 68.85714$$

Sexto paso

División de dos números expresados en notación decimal

Para dividir dos números expresados en notación decimal, debemos eliminar el punto decimal del divisor.

Multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número, no altera la fracción. Para eliminar el punto decimal del divisor multiplicamos el dividendo y el divisor, es decir el numerador y el denominador por 10, 100, 1,000, etcétera.

$$\frac{48}{0.006} = \frac{48 \times 1{,}000}{\underbrace{0.006}_{\text{Tres lugares.}} \times \underbrace{1{,}000}_{\text{Tres ceros.}}} = \frac{48{,}000}{6} = 8{,}000$$

Tres lugares.

$$0.006 \overline{)\,4\,8\,} \quad \text{Tres ceros.} \longrightarrow 6\overline{)\,4\,8{,}0\,0\,0\,} \quad \text{Tres ceros.} \longrightarrow \begin{array}{r} 8{,}0\,0\,0 \\ 6\overline{)\,4\,8{,}0\,0\,0} \\ -4\,8 \\ \hline 0\;\,0 \\ -0\;\,0 \\ \hline 0\;\,0 \\ -0\;\,0 \\ \hline 0\;\,0 \\ -0\;\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\frac{0.96}{0.0002} = \frac{0.96 \times 10{,}000}{\underbrace{0.0002}_{\text{Cuatro lugares.}} \times \underbrace{10{,}000}_{\text{Cuatro ceros.}}} = \frac{9{,}600}{2} = 4{,}800$$

Cuatro lugares.

$$0.0002\overline{)\,0.9\,6\,} \quad \text{Cuatro lugares.} \longrightarrow 2\overline{)\,9{,}6\,0\,0\,} \quad \text{Cuatro lugares.} \longrightarrow \begin{array}{r} 4{,}8\,0\,0 \\ 2\overline{)\,9{,}6\,0\,0} \\ -8 \\ \hline 1\;\,6 \\ -1\;\,6 \\ \hline 0\;\,0 \\ -0\;\,0 \\ \hline 0\;\,0 \\ -0\;\,0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Para dividir dos números expresados en notación decimal, contamos las columnas numéricas (lugares) que debemos recorrer el punto decimal.

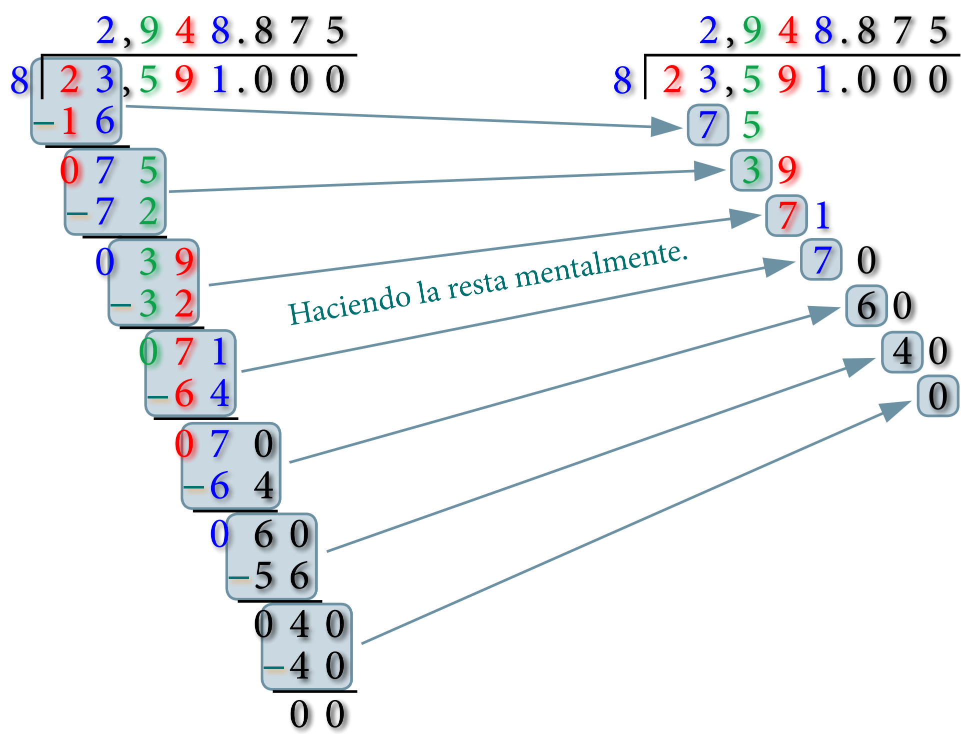
Tres lugares.

$$0.005\overline{)\,7\,4.8\,9\,} \quad \text{Tres lugares.} \longrightarrow 5\overline{)\,7\,4{,}8\,9\,0\,} \quad \text{Tres lugares.} \longrightarrow \begin{array}{r} 1\,4{,}9\,7\,8 \\ 5\overline{)\,7\,4{,}8\,9\,0} \\ -5 \\ \hline 2\,4 \\ -2\,0 \\ \hline 0\,4\;\,8 \\ -4\;\,5 \\ \hline 0\;\,3\;\,9 \\ -3\;\,5 \\ \hline 4\;\,0 \\ -4\;\,0 \\ \hline 0\;\,0 \end{array}$$

Séptimo paso

División de dos números haciendo las restas mentalmente

Cuando el divisor tiene solamente un dígito, podemos realizar las restas mentalmente, con lo cual ahorramos un poco de tiempo.

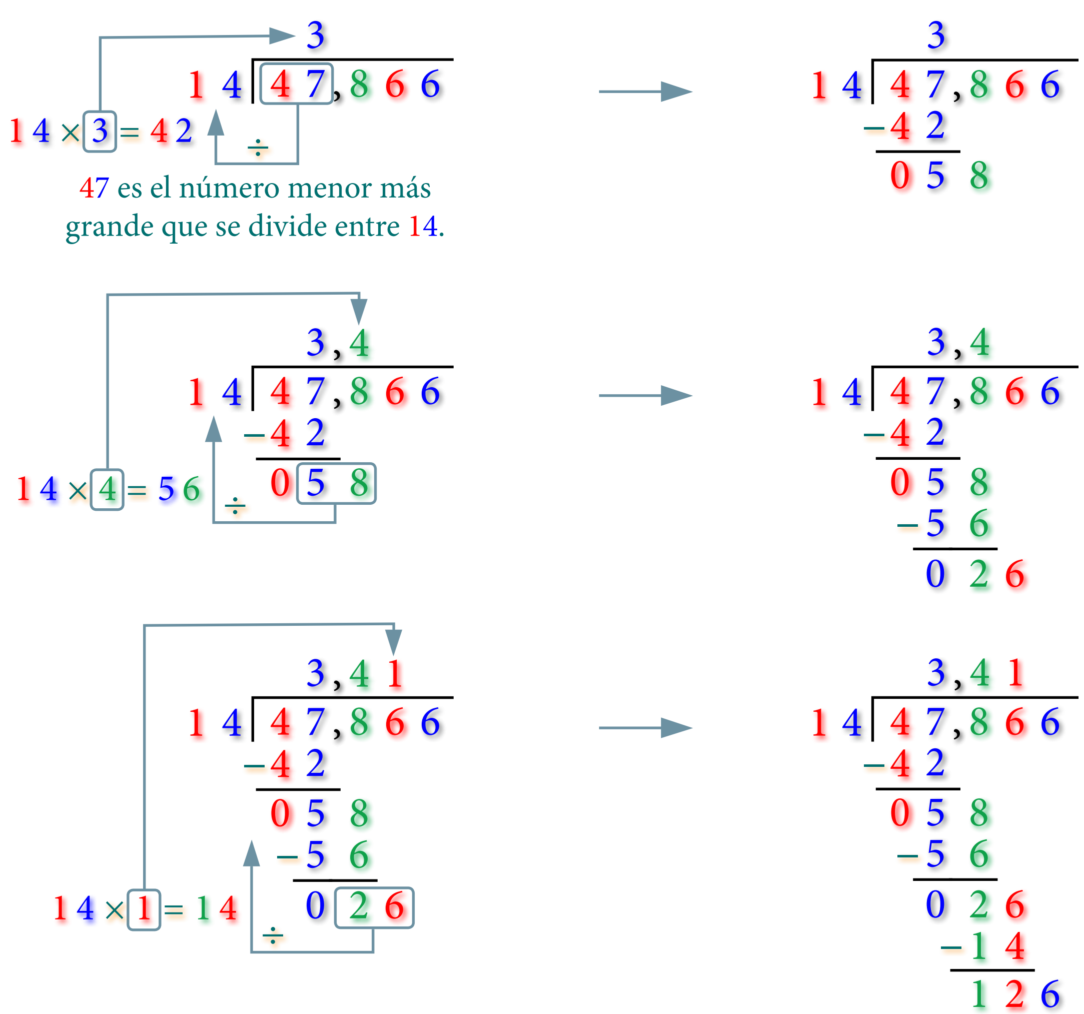


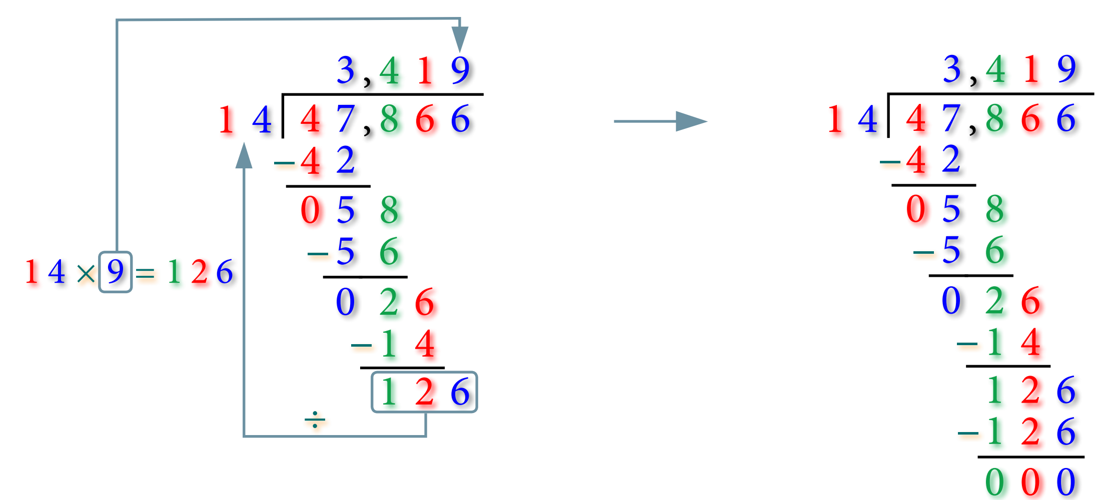
Octavo paso

División de dos números cuando el divisor tiene dos o más cifras

Para realizar divisiones, cuando el divisor tiene dos o más cifras, seguimos el mismo procedimiento que hemos utilizado cuando el divisor tiene una cifra.

Tomamos del dividendo tantas cifras como sea necesario, encontramos el número menor más grande que se divide en forma exacta entre el divisor.





Noveno paso

División de dos números haciendo las restas mentalmente

Cuando el divisor tiene más de dos dígitos, también podemos efectuar las restas mentalmente.

Primero, efectuamos la multiplicación por la unidad del divisor, recordando mentalmente la cifra de las decenas, que debemos añadir al multiplicar el dígito de las decenas. Al multiplicar el dígito de las decenas, recordamos mentalmente la cifra de las centenas, que añadimos al multiplicar el dígito de las centenas. Y así, sucesivamente.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & \underline{-246} \\ & 057 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & 7 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 3 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & 57 \end{array}$$

6 para 13 es 7 y llevamos 1.

$3 \times 2 = 6$

24 más 1 que llevamos es 25 para 30 es 5.

$3 \times 8 = 24$

$$\begin{array}{r|l} & 37 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & \underline{-246} \\ & 0574 \\ & \underline{-574} \\ & 000 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 37 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & 574 \\ & 000 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 37 \\ \hline 82 & 3{,}034 \\ & 574 \\ & 000 \end{array}$$

14 para 4 es 0 y llevamos 1.

$7 \times 2 = 14$

56 más 1 que llevamos es 57 para 57 es 00.

$7 \times 8 = 56$

Décimo paso

División de dos números cualquiera expresados en notación decimal

Efectuamos la división escribiendo las restas y haciendo las restas mentalmente.

$$\frac{316.24}{5.7} = \frac{316.24 \times 10}{5.7 \times 10} = \frac{3{,}162.4}{57}$$

$$5.7 \,\big|\, 316.24$$

Una columna. Una columna.

$$\longrightarrow \begin{array}{r|l} & 55.48 \\ \hline 57 & 3{,}162.40 \\ & \underline{-285} \\ & 0312 \\ & \underline{-285} \\ & 0274 \\ & \underline{-228} \\ & 0460 \\ & \underline{-456} \\ & 004 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r|l} & 55.48 \\ \hline 57 & 3{,}162.40 \\ & 312 \\ & 274 \\ & 460 \\ & 004 \end{array}$$

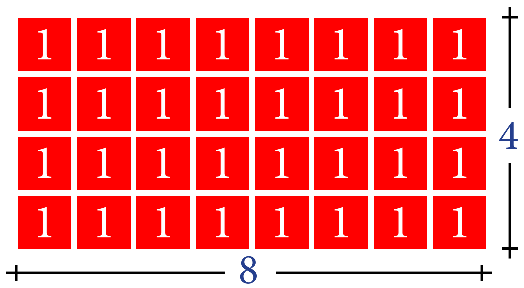
La División y la Multiplicación Son Operaciones Inversas

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Construcción de las tablas de multiplicar y dividir

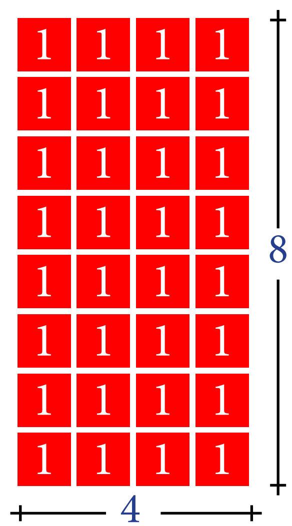
Tablas de multiplicar

Uniendo cuadritos formamos un área.



Área = 32

$8 \times 4 = 32$

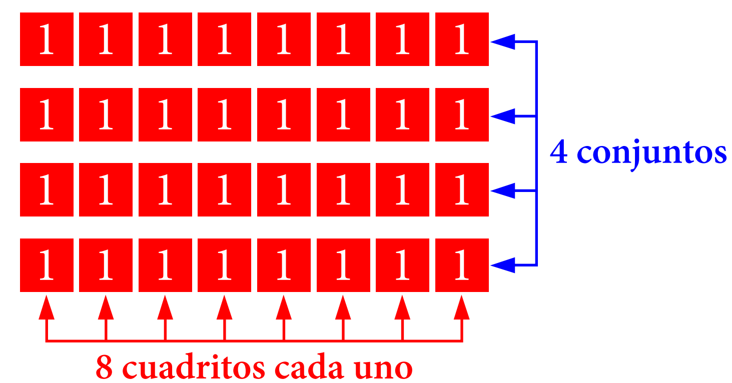


Área = 32

$4 \times 8 = 32$

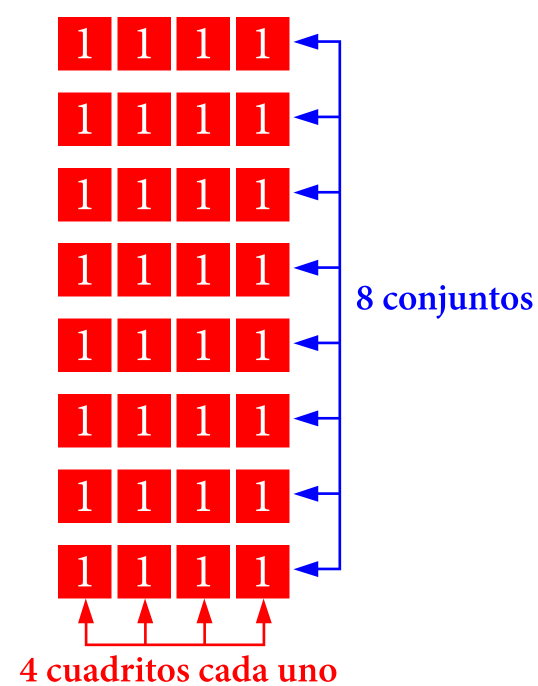
Tablas de dividir

Separando el área en áreas más pequeñas construimos las tablas de dividir.



Área = 32

$$\frac{32}{4} = 8$$



Área = 32

$$\frac{32}{8} = 4$$

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Tablas de multiplicar

Multiplicamos la base 8 por la altura 4 del rectángulo.

Área = 32

$$8 \times 4 = 32 \longrightarrow$$

Multiplicamos la base 4 por la altura 8 del rectángulo.

Área = 32

$$4 \times 8 = 32 \longrightarrow$$

Tablas de dividir

Dividimos el área en 4 áreas con 8 cuadritos cada una.

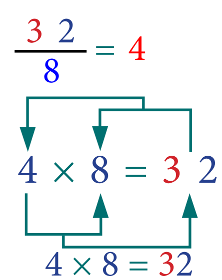
Área = 32

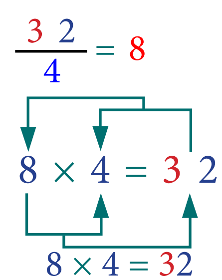
$$\frac{32}{4} = 8$$

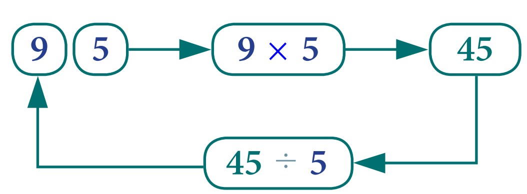
Dividimos el área en 8 áreas con 4 cuadritos cada una.

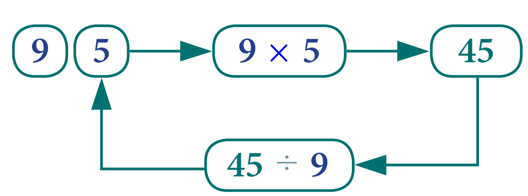
Área = 32

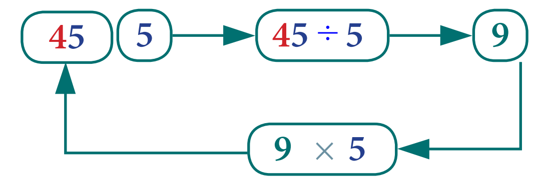
$$\frac{32}{8} = 4$$

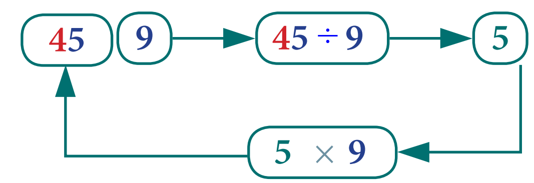












Comprobación de la Multiplicación y la División

Quinto Nivel de Abstracción

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Multiplicar significa agrupar el área de un cuadrado o rectángulo. Dividir es separar el área que hemos agrupado al multiplicar.

$$5 \times 9 = 45 \longrightarrow \frac{45}{9} = 5 \longrightarrow \frac{45}{5} = 9$$

Comprobación de la multiplicación

Si el resultado de la multiplicación, lo dividimos entre uno de los multiplicandos, obtenemos el otro multiplicando. De esta manera, podemos verificar que la multiplicación es correcta.

$$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 32 \end{array} \div \longrightarrow \frac{32}{4} = 8 \qquad\qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 4 \\ \hline 32 \end{array} \div \longrightarrow \frac{32}{8} = 4$$

$$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ 62 \\ \hline 116 \\ 348 \\ \hline 3{,}596 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}l} & 58 \\ 62 & \big)\overline{3{,}596} \\ & 496 \\ & 000 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r@{\,}l} & 62 \\ 58 & \big)\overline{3{,}596} \\ & 116 \\ & 000 \end{array}$$

Comprobación de la división

Si multiplicamos el divisor por el resultado de la división, obtenemos el dividendo.

$$\text{Divisor.} \rightarrow \begin{array}{r@{\,}l} & 6 \\ 7 & \big)\overline{42} \end{array} \qquad \text{Dividendo.} \rightarrow \frac{42}{7} = 6 \quad \times \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{r} 6 \\ \times\ 7 \\ \hline 42 \end{array}$$

Divisor. Dividendo.

$$\begin{array}{r@{\,}l} & 67 \\ 83 & \big)\overline{5{,}561} \\ & 581 \\ & 000 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{r} 83 \\ \times\ 67 \\ \hline 581 \\ 498 \\ \hline 5{,}561 \end{array}$$

Capítulo 6

Concepto de Número Fraccionario

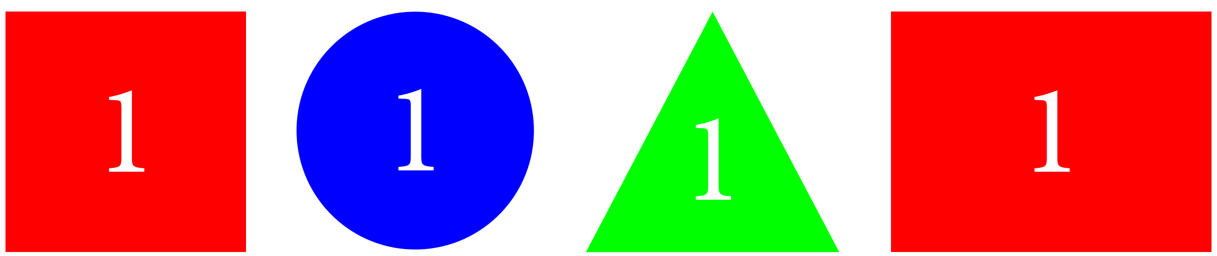
Unidad de un Número Fraccionario

Concepto de Número Fraccionario

Primero y Segundo Niveles de Abstracción

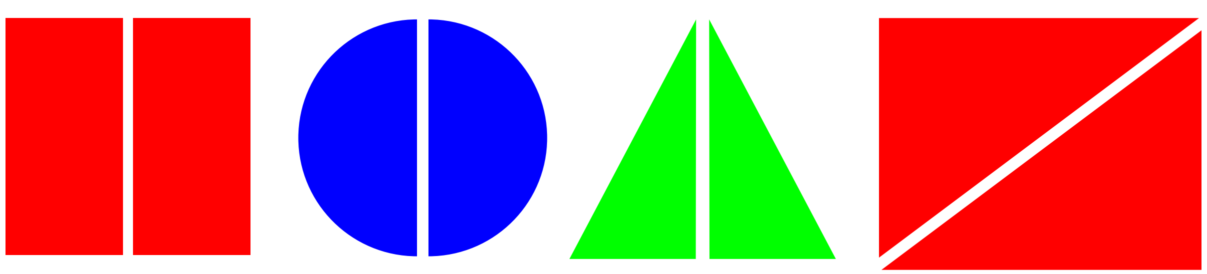
Unidad de una fracción

En los primeros niveles de abstracción, utilizamos como unidad de una fracción, una figura geométrica.



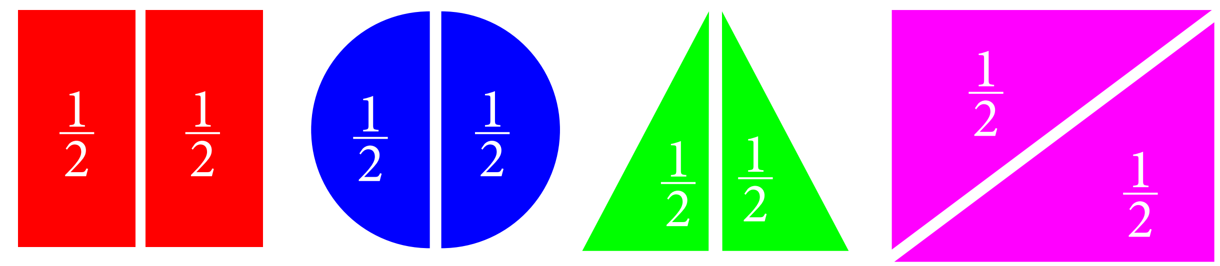
Concepto de fracción

Cuando la unidad está dividida –fraccionada– en partes iguales en forma y tamaño, a cada una de las partes, le llamamos una fracción.



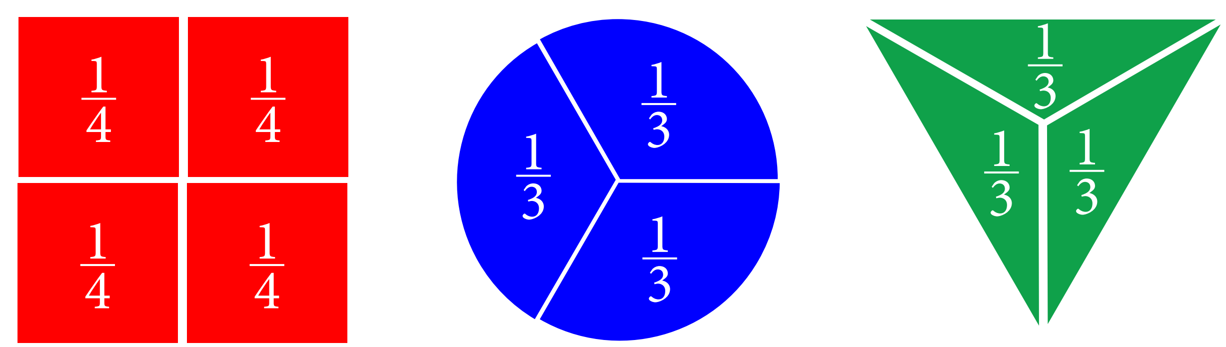
Notación de fracción

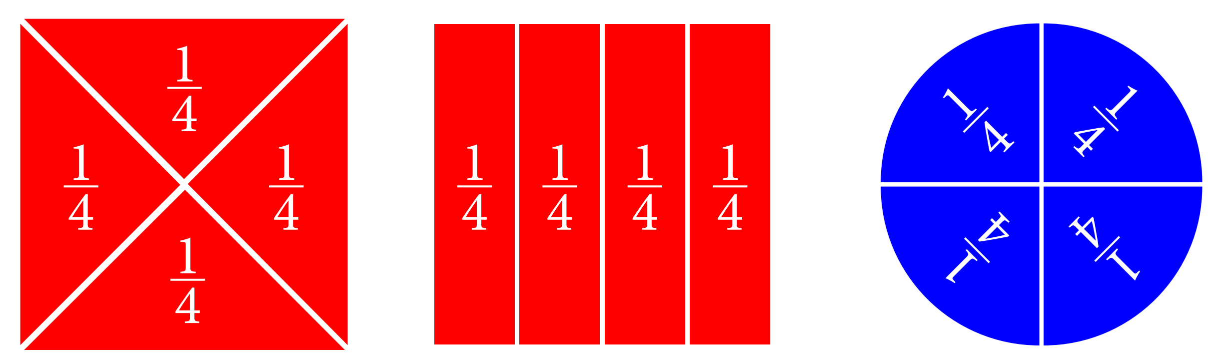
Para indicar que la unidad ha sido dividida en partes iguales en forma y tamaño, utilizamos dos números: uno en la parte superior –numerador– para indicar cuántas partes tomamos, y otro número en la parte inferior –denominador– para indicar en cuántas partes hemos dividido la unidad.



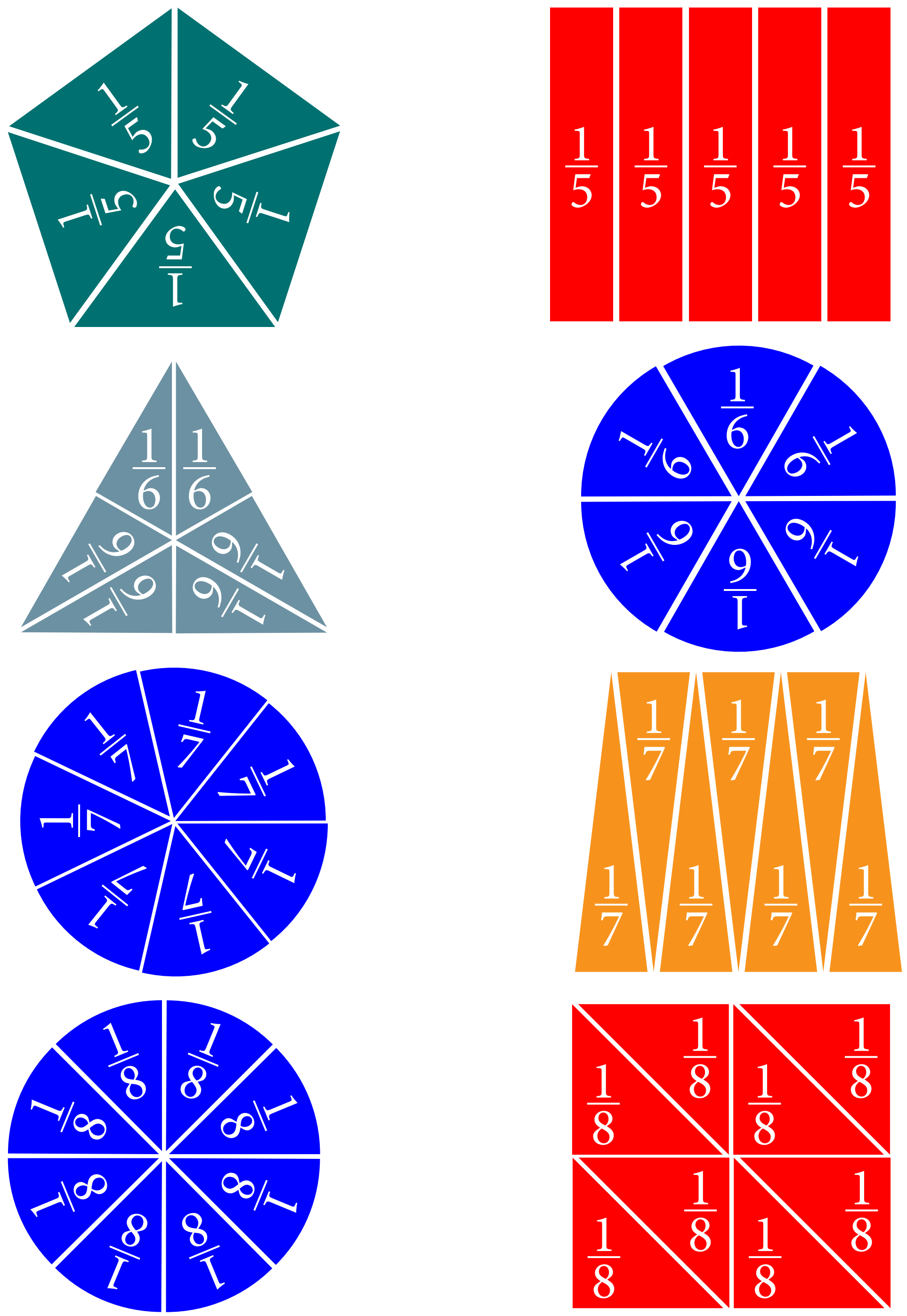
Numerador. → $\frac{1}{2}$ ← 1 Fracción.
Denominador. → ← De 2 fracciones.

Medios, tercios y cuartos





Quintos, sextos, séptimos y octavos



El material didáctico, los ejercicios en los libros de texto y los juegos educativos, han sido diseñados para que los niños, desde que inician el estudio de las matemáticas, entiendan y demuestran el concepto de fracción y se familiaricen con la notación de fracción.

Mediante el uso de figuras geométricas en los dos primeros niveles de abstracción, pretendemos que los estudiantes imaginen las fracciones, e intuitivamente descubran, que solamente fracciones que son de la misma forma y tamaño se pueden sumar.

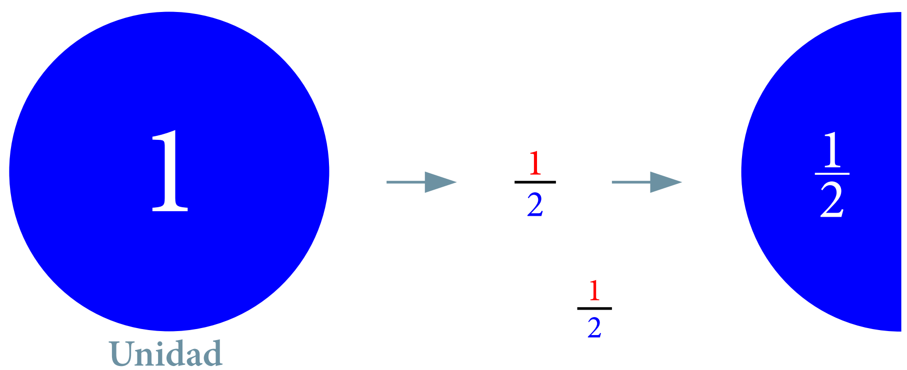
Unidad Simple de un Número Fraccionario

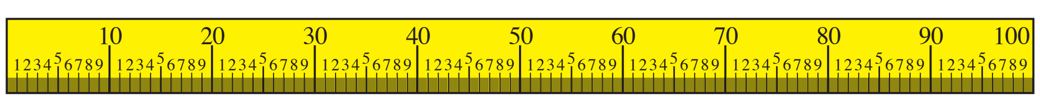
Tercero al Sexto Niveles de Abstracción

Unidad de una fracción

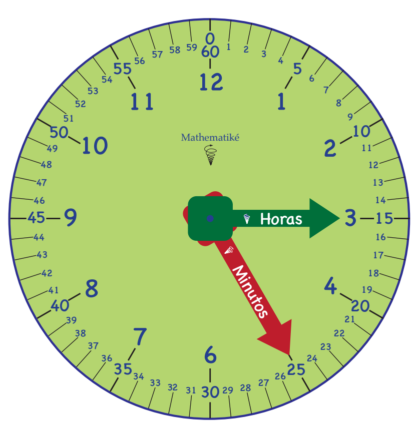
Para que una fracción adquiera sentido, primero debemos definir cuál es la unidad de la fracción, ya que la misma fracción puede significar diferentes realidades.

Por ejemplo, la fracción $\frac{1}{2}$ puede ser una figura geométrica, o puede valer 30 o 50 u otro número, dependiendo de la unidad de la que procede.





$\frac{1}{2}\ m = 50$ centímetros.



$\frac{1}{2}\ hr = 30$ minutos.

Concepto de unidad

En el *primero* y *segundo* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica.

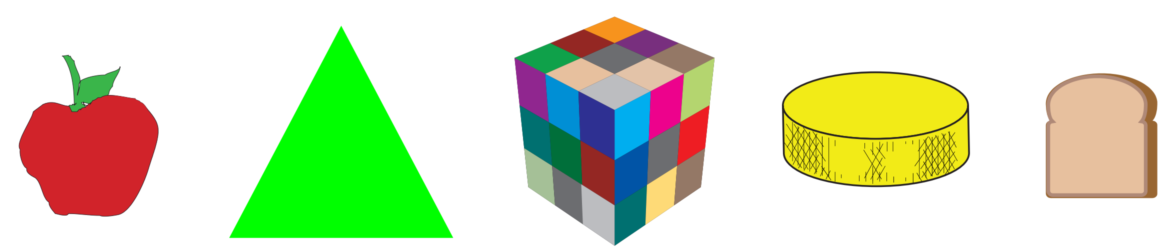
En el *tercero* y *cuarto* niveles de abstracción la *unidad* de una fracción es una figura geométrica y una unidad de medición: tiempo, distancia, área y volumen.

En el *quinto* nivel de abstracción estudiamos que la *unidad* de una fracción puede ser *simple* o *compuesta*.

Unidad simple

La unidad de una fracción es *simple* cuando el número que fraccionamos es 1, 1 objeto, 1 figura geométrica o 1 unidad de medición.

Del *primero* al *cuarto* niveles de abstracción hemos utilizado únicamente *unidades simples*.



Fracciones simples y complejas

Las fracciones son simples cuando su numerador y denominador son números enteros.

Numerador. ⟶ 3
Denominador. ⟶ 5

$\frac{3}{5}$

Fracción Simple

Las fracciones son complejas cuando su numerador y denominador son números fraccionarios.

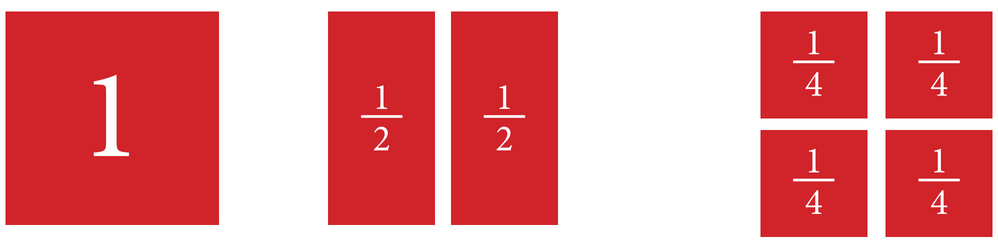
Numerador. ⟶ $\frac{2}{7}$
Denominador. ⟶ $\frac{4}{9}$

$\dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{4}{9}}$

Fracción Compleja

Notación de fracción cuando la unidad es simple

Para explicar claramente el valor de una fracción necesitamos dos términos: un término que especifique en cuántas partes hemos dividido la unidad –*denominador*– y otro término que especifique cuántas fracciones o partes de ese total hemos tomado –*numerador*–.



Unidad **2 Fracciones** **4 Fracciones**

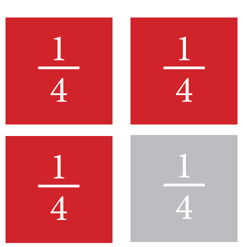
Numerador. ⟶ 1 ⟵ 1 Fracción.
Denominador. ⟶ 2 ⟵ De 2 fracciones.

$\frac{1}{2}$

1 ⟵ 1 Fracción.
4 ⟵ De 4 fracciones.

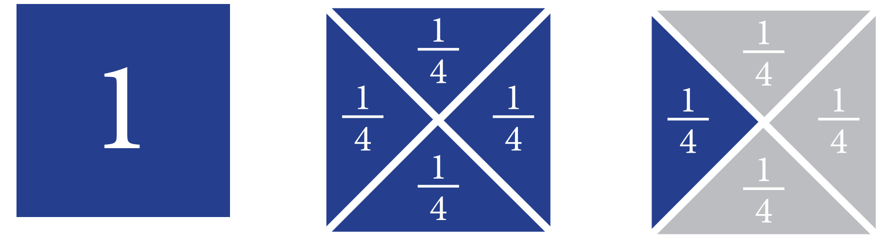
$\frac{1}{4}$

Numerador. ⟶ 1 ⟵ Especifica cuántas partes del total de partes hemos tomado.
Denominador. ⟶ 2 ⟵ Especifica en cuántas partes hemos dividido la unidad.



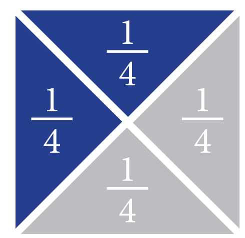
3 ⟵ Cuántas partes del total de partes hemos tomado.
4 ⟵ En cuántas partes hemos dividido la unidad.

Las fracciones tienen que ser del mismo tamaño y forma.

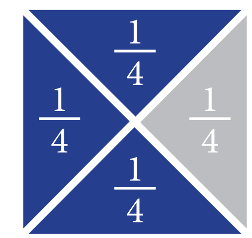


Unidad **4 Fracciones**

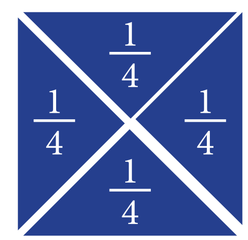
1 ⟵ 1 Fracción.
4 ⟵ De 4 fracciones.



2 ⟵ 2 Fracciones.
4 ⟵ De 4 fracciones.



3 ⟵ 3 Fracciones.
4 ⟵ De 4 fracciones.

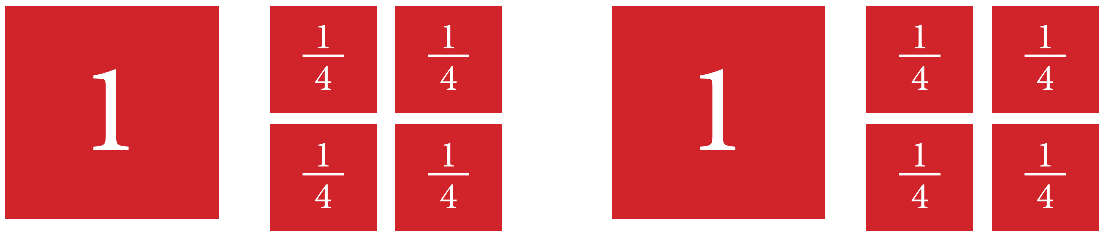


4 Fracciones. ⟶ 4
De 4 fracciones. ⟶ 4

$\frac{4}{4} = 1$ ⟵ Unidad.

Unidad simple repetida varias veces

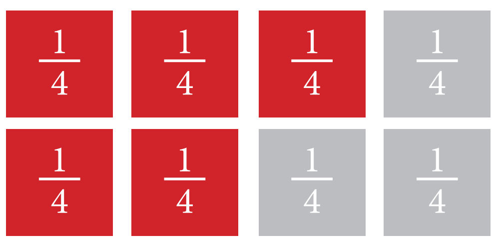
La misma *unidad*, *repetida* varias veces, podemos dividirla o fraccionarla en partes iguales y tomar fracciones que comprendan más de una unidad.



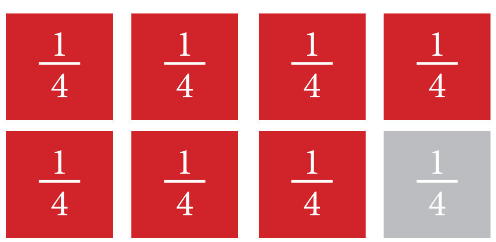
Unidad   4 Fracciones   Unidad   4 Fracciones

1 Unidad $= \frac{4}{4}$

2 Unidades $= \frac{8}{4}$ ← 8 Fracciones.
← De 4 fracciones de cada unidad.

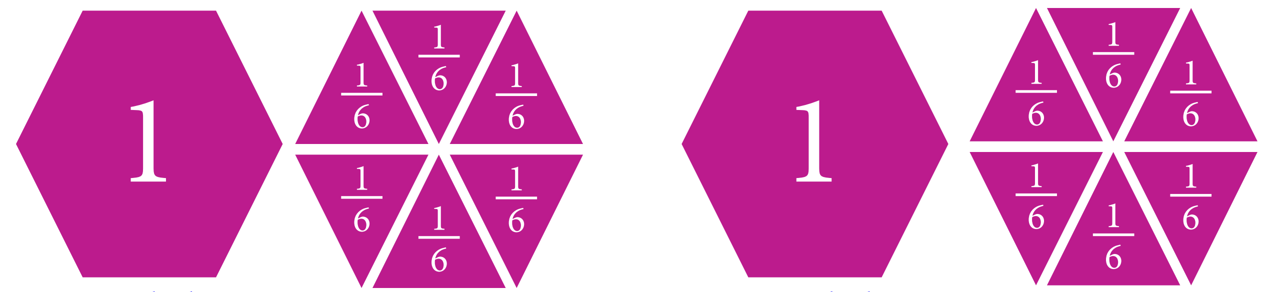


$\frac{5}{4}$ ← 5 Fracciones.
← De 4 fracciones de cada unidad.

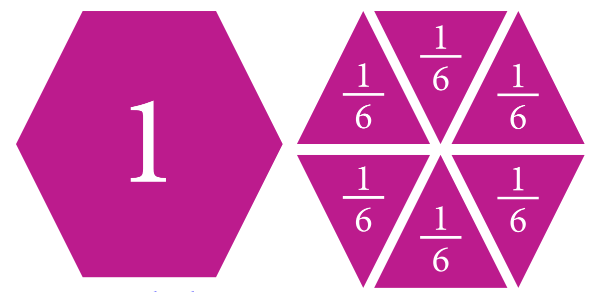


$\frac{7}{4}$ ← 7 Fracciones.
← De 4 fracciones de cada unidad.

Es muy importante *no confundir* fracciones de una *unidad compuesta* y fracciones de una *unidad repetida* varias veces.



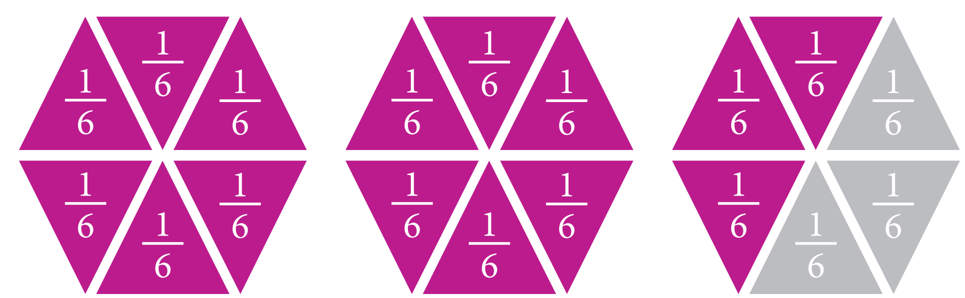
Unidad   Unidad



Unidad

1 Unidad $= \frac{6}{6}$

3 Unidades $= \frac{18}{6}$ ← 18 Fracciones.
← De 6 fracciones de cada unidad.



$\frac{15}{6}$ ← 15 Fracciones.
← De 6 fracciones de cada unidad.

Fracciones impropias

Cuando en una fracción el numerador es *mayor* que el denominador sabemos que la fracción procede de una *unidad repetida* varias veces.

Cuando el *numerador* de una fracción es *mayor* que el denominador, a la fracción le llamamos *fracción impropia*.

$\frac{18}{6}$ ← Mayor que el denominador. → $\frac{15}{6}$

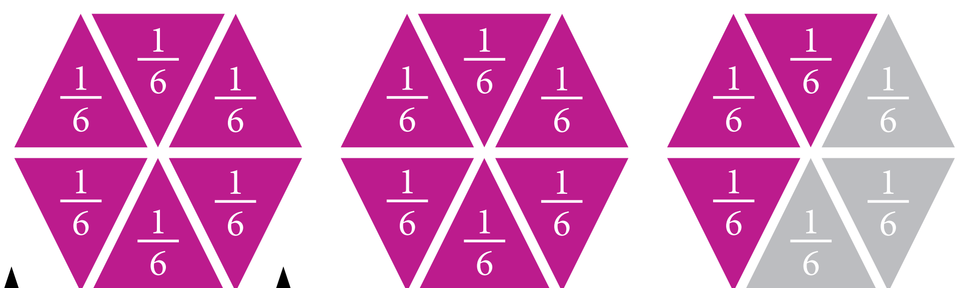
Fracciones impropias.

Como sabemos que una fracción *impropia* procede de una *unidad repetida* varias veces, podemos determinar de *cuántas* unidades procede.

El *denominador* indica el número de fracciones en las cuales la *unidad* está dividida.

$\frac{15}{6}$ ← Cada una de las unidades está dividida en 6 fracciones.

→ El numerador indica cuántas fracciones hemos tomado.



$\frac{6}{6} = 1$ ← Unidad.

$\frac{12}{6} = 2$ ← Unidades.

$\frac{15}{6}$

Descomponemos el numerador en las unidades que podemos formar de acuerdo a lo que indica el denominador.

$$\frac{15}{6} = \frac{12+3}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

2 Unidades.

Fracciones impropias en notación mixta

La fracción impropia la podemos expresar como la suma de un número entero más una fracción *no impropia*, es decir *propia*.

Cuando una *fracción impropia* la expresamos como la *suma* de un *número entero* y una *fracción propia* le llamamos *notación mixta*.

Le llamamos notación *mixta* porque hemos mezclado un número *entero* con una *fracción*.

$$\frac{15}{6} = 2 + \frac{3}{6}$$

Entero. Fracción.

En matemáticas nos gusta escribir las expresiones en la forma más compacta posible, por eso no escribimos el signo más, pero sabemos que es una suma.

$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6}$$

Utilizando el concepto de fracciones equivalentes, simplificamos la fracción.

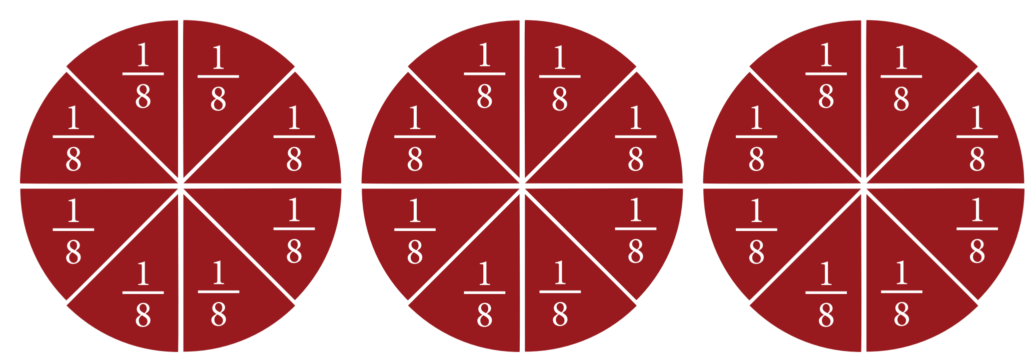
Dividimos entre 3. $\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,2}} = \frac{1}{2}$

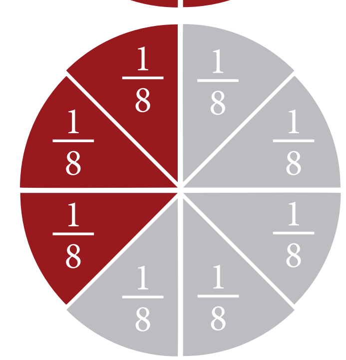
$$\frac{15}{6} = 2\,\frac{3}{6} = 2\,\frac{1}{2}$$

Cuando una *fracción impropia* está expresada en notación mixta, podemos convertirla en notación de fracción haciendo el proceso inverso.

La fracción impropia en notación mixta:

$$3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8}$$





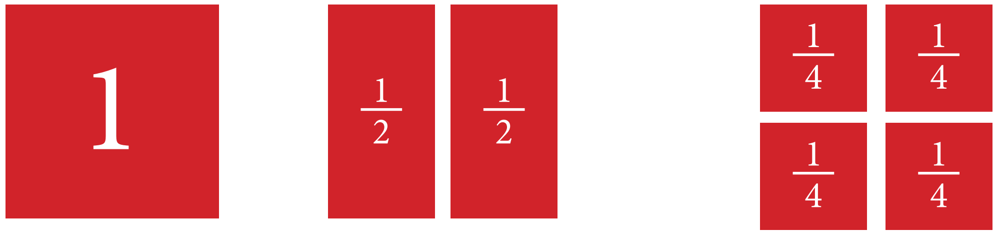
$\frac{8}{8} = 1$ Unidad.

$\frac{24}{8} = 3$ Unidades.

$$3\,\frac{3}{8} = 3 + \frac{3}{8} = \frac{24}{8} + \frac{3}{8} = \frac{27}{8}$$

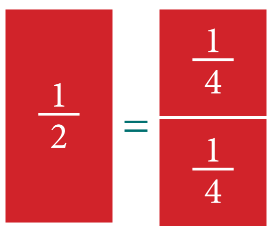
Fracciones equivalentes

Una *unidad*, podemos fraccionarla de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, en medios y en cuartos.



Unidad **2 Fracciones** **4 Fracciones**

Nos damos cuenta que *un medio* es equivalente a *dos cuartos* ya que representan exactamente la misma área.



$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

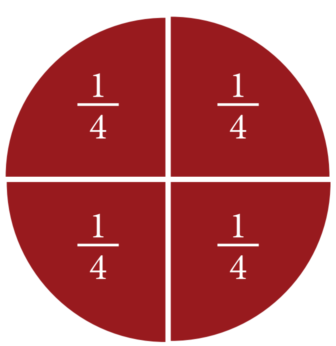
Cuando dos fracciones representan la *misma área* les llamamos fracciones *equivalentes*.

Cuando el *área* representada por *un medio* la dividimos en *dos áreas*, creamos una fracción *equivalente*.

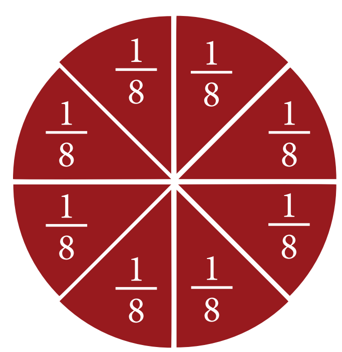
Dividir *un área* en *dos áreas* iguales es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y el denominador de la fracción.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

Dividimos un círculo en *cuatro* partes iguales.

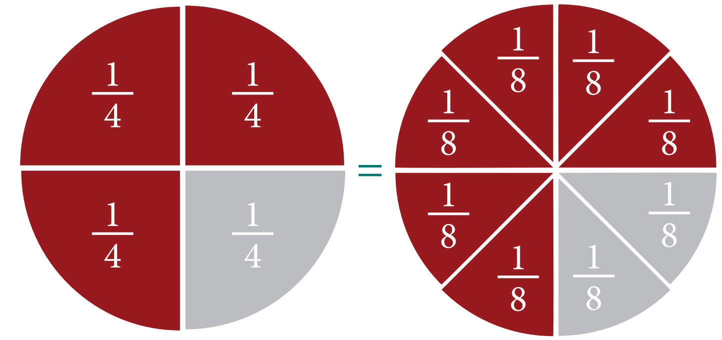


Ahora lo dividimos en *ocho* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Tomamos *tres cuartos* que es equivalente a *seis octavos*.



$\frac{3}{4}$ $\frac{6}{8}$

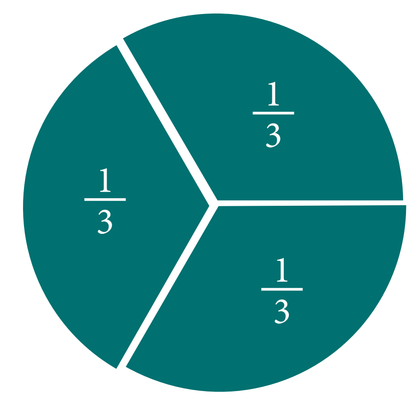
Hemos dividido *un* cuarto en *dos* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *2* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el doble de fracciones.

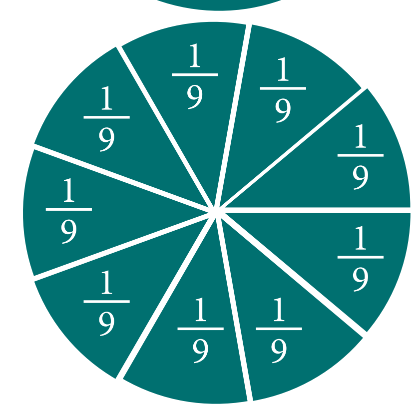
$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = \frac{6}{8} \quad \longrightarrow \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Para hacer las fracciones de la mitad de tamaño.

Dividimos un círculo en *tres* partes iguales.



Ahora lo dividimos en *nueve* partes iguales.



Hemos creado fracciones equivalentes ya que: $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$

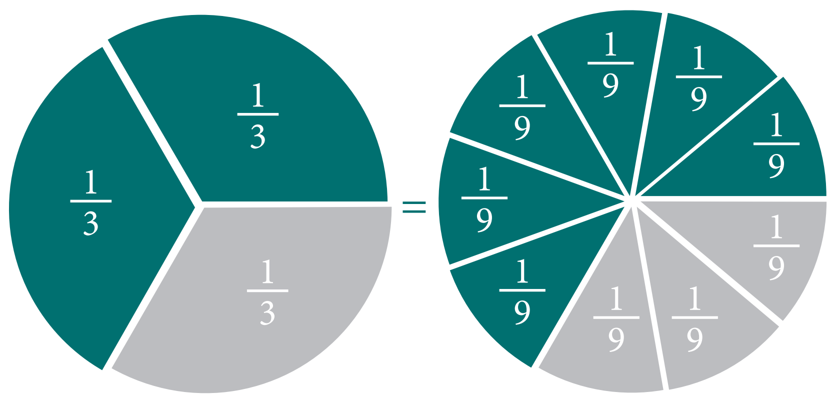
Hemos dividido *un* tercio en *tres* partes iguales, lo cual es equivalente a *multiplicar* por *3* el numerador y denominador de la fracción.

Para crear el triple de fracciones.

$$\frac{1}{3} = \frac{1\times 3}{3\times 3} = \frac{3}{9} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

Para hacer las fracciones de la tercera parte de tamaño.

Tomamos *dos tercios* que es equivalente a *seis novenos*.



$$\frac{2}{3} \qquad \frac{6}{9}$$

Fracciones equivalentes utilizando la multiplicación y división

Multiplicando el numerador y el denominador de una fracción por el mismo número creamos una fracción equivalente como hemos demostrado.

$$\frac{2}{5} = \frac{2\times 3}{5\times 3} = \frac{6}{15} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{2}{5} = \frac{2\times 4}{5\times 4} = \frac{8}{20} \rightarrow \frac{2}{5} = \frac{8}{20}$$

$$\frac{3}{9} = \frac{3\times 2}{9\times 2} = \frac{6}{18} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{6}{18} \qquad \frac{3}{9} = \frac{3\times 3}{9\times 3} = \frac{9}{27} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{9}{27}$$

La *división* es la operación *inversa* de la *multiplicación*, por lo cual si dividimos el numerador y el denominador de una fracción entre el mismo número, también creamos fracciones equivalentes.

$$\frac{6/2}{18/2} = \frac{3}{9} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} \qquad \frac{6/3}{18/3} = \frac{2}{6} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{2}{6}$$

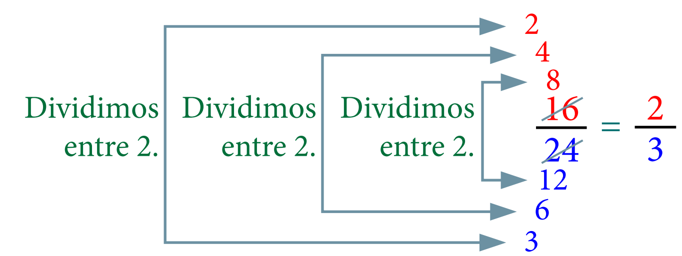
$$\frac{3/3}{9/3} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{6}{18} = \frac{3}{9} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Simplificación de fracciones

Cuando creamos fracciones equivalentes dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número, simplificamos la fracción.

Para hacer más sencillo el proceso de simplificar una fracción, las divisiones las hacemos mentalmente.

Cuando una fracción puede simplificarse varias veces utilizamos el siguiente procedimiento haciendo las divisiones mentalmente.



Cada vez que dividimos el numerador y el denominador por el mismo número, creamos una fracción equivalente.

$$\frac{16}{24} = \frac{8}{12} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\rightarrow \quad \frac{18}{42} = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

Recíproco de un número

Antes de estudiar el recíproco de una fracción, recordemos el concepto de recíproco de un número.

El recíproco de un número es 1 dividido entre el número.

$2 \rightarrow \frac{1}{2}$

Número — Recíproco

$32 \rightarrow \frac{1}{32}$

Número — Recíproco

$1{,}213 \rightarrow \frac{1}{1{,}213}$

Recíproco — Recíproco

Al recíproco de un número también le llamamos inverso multiplicativo, ya que al multiplicar un número por su recíproco, el resultado es siempre 1.

$$2 \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \longrightarrow \quad 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$32 \times \frac{1}{32} = \frac{32 \times 1}{32} = \frac{32}{32} = 1 \quad \longrightarrow \quad 32 \times \frac{1}{32} = 1$$

Recíproco de una fracción

El recíproco de una fracción, es la fracción que se obtiene al intercambiar el numerador y el denominador de una fracción.

$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2}$

Fracción — Recíproco

$\frac{17}{51} \rightarrow \frac{51}{17}$

Fracción — Recíproco

Al recíproco de una fracción también le llamamos fracción inversa multiplicativa, ya que al multiplicar una fracción por su recíproco, el resultado es siempre 1.

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{10}{10} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$$

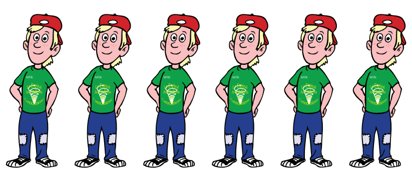
$$\frac{17}{51} \times \frac{51}{17} = \frac{17 \times 51}{51 \times 17} = 1 \quad \longrightarrow \quad \frac{17}{51} \times \frac{51}{17} = 1$$

Unidad Compuesta de un Número Fraccionario

Quinto al Séptimo Niveles de Abstracción

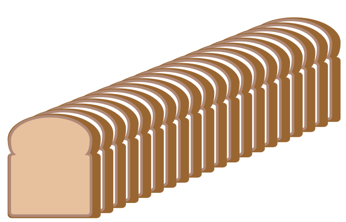
Unidad compuesta

La unidad de una fracción es *compuesta* cuando el *número* o el *conjunto* de objetos que fraccionamos es *mayor* a 1.

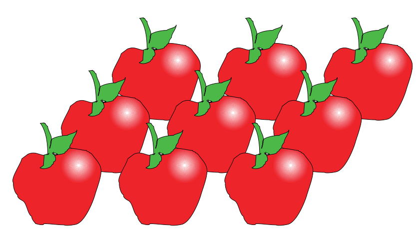


Unidad
Compuesta de 6 niños.

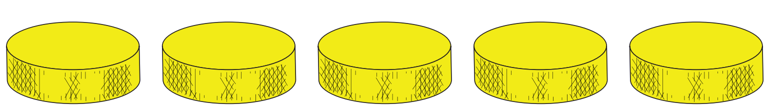
Unidad
Compuesta de 9 sillas.



Unidad
Compuesta de 20 rebanadas.



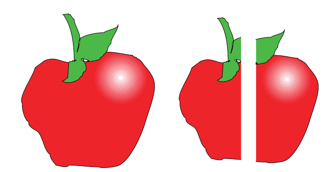
Unidad
Compuesta de 9 manzanas.



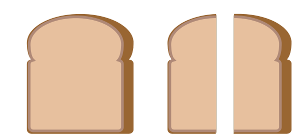
Unidad
Compuesta de 5 quesos.

Elementos de una unidad compuesta

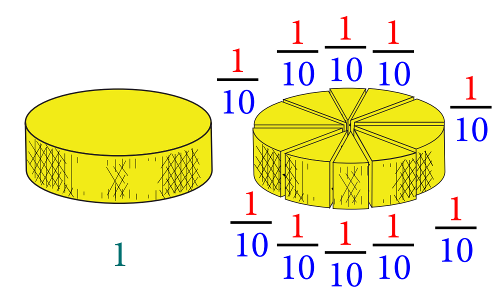
Cada uno de los elementos de una *unidad compuesta* puede también ser dividido en fracciones.



1 $\quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$



1 $\quad \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

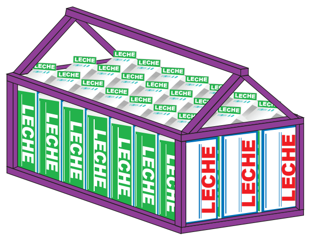


Una vez que dividimos en fracciones los elementos de la *unidad compuesta*, cada uno de los elementos se comporta como una *unidad simple*.

Por esta razón un problema en el que la *unidad* es *compuesta* y a su vez sus elementos están divididos en fracciones, en este problema se combinan la *unidad compuesta* con una *unidad simple* repetida varias veces.

Notación de fracción cuando la unidad es compuesta

Si la unidad es *compuesta*, debemos claramente especificar en cuántas partes la dividimos y de ese total de partes cuántas partes tomamos.



Unidad
Compuesta de 21 litros.

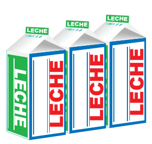
1

Un elemento de la unidad compuesta.

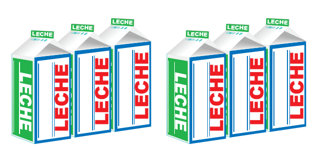
Dividimos la unidad en siete partes del mismo tamaño.

$\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{7}$

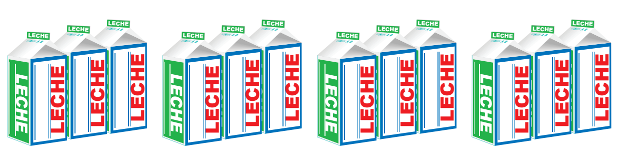
$\frac{1}{7}$ ← 1 Fracción. ← De 7 fracciones.



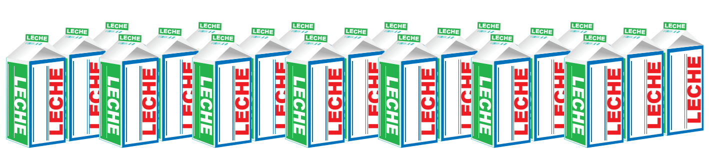
$\frac{1}{7}$ = 3 litros de leche.



$\frac{2}{7}$ = 6 litros de leche.



$\frac{4}{7}$ = 12 litros de leche.

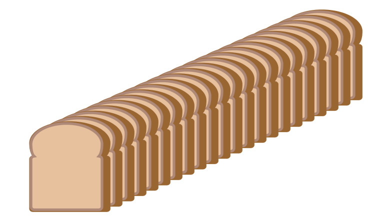


$\frac{7}{7}$ = 1 Unidad = 21 litros de leche.

Unidades simples y compuestas combinadas

Cuando la unidad es *compuesta*, en algunas ocasiones necesitamos combinarla con una unidad *simple*.

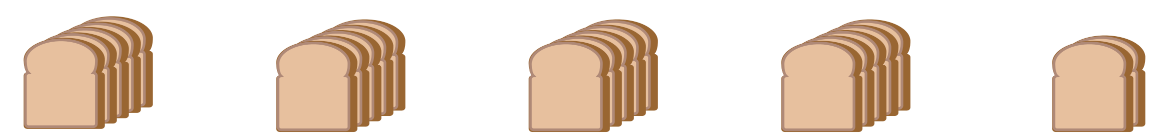
Por ejemplo, tenemos un pan que está cortado en 22 rebanadas. Queremos saber cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



Unidad
Compuesta de 22 rebanadas.

Se trata de fracciones cuya unidas es *compuesta*, ya que el pan está *compuesto* de 22 rebanas.

Dividimos en *cuatro* partes iguales para formar *cuartos* de la unidad.



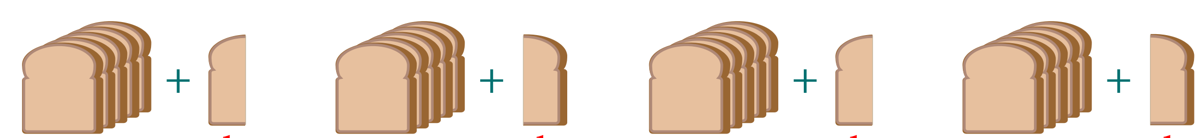
5 Rebanadas. 5 Rebanadas. 5 Rebanadas. 5 Rebanadas. 2 Rebanadas.

Mismo tamaño, forma y cantidad. Sobran.

Las *dos* rebanadas que sobran las dividimos a la *mitad*, para tener *cuatro* mitades.

$1 \to \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ $\quad 1 \to \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

Formamos *cuatro fracciones* iguales, del mismo tamaño, forma y cantidad.



$5 + \frac{1}{2}$ $\quad 5 + \frac{1}{2}$ $\quad 5 + \frac{1}{2}$ $\quad 5 + \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4}$ Del pan. $\frac{1}{4}$ Del pan. $\frac{1}{4}$ Del pan. $\frac{1}{4}$ Del pan.

Unidad compuesta. → $\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2}$ ← Rebanada.

Del pan. Rebanadas.

Cada una de las rebanada de pan es una unidad simple. Expresamos la fracción en notación mixta.

$$\underbrace{5}_{\text{Entero.}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Fracción.}} = 5\frac{1}{2}$$

Cuando trabajamos con fracciones es muy importante que claramente especifiquemos qué es la *unidad*. Si se trata de una *unidad* simple o compuesta.

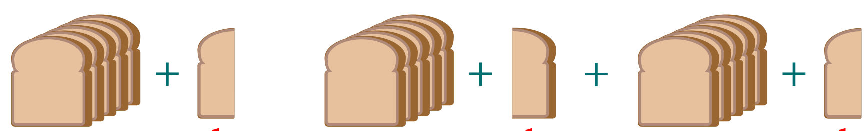
En el ejemplo anterior el *pan completo* es una *unidad compuesta*, sin embargo, cada una de las *rebanadas* son *unidades simples*.

$$\underbrace{5}_{\text{Unidades.}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Unidad.}}$$

Por eso es posible decir que: $\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Fracción de la unidad compuesta.}} = \underbrace{5}_{\text{Unidad simple repetida varias veces.}} + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Fracción de la unidad simple.}}$

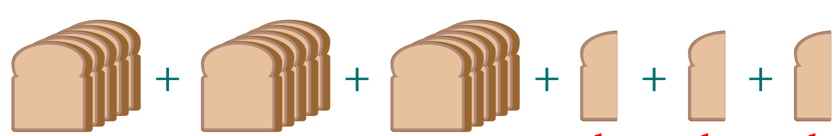
$$\frac{1}{4} = 5 + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} = 5\frac{1}{2}$$

Ahora que ya conocemos cuántas rebanadas son *un cuarto* del pan, podemos calcular cuántas rebanadas son *tres cuartos* del pan.



$$\underbrace{5 + \frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{5 + \frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}} + \underbrace{5 + \frac{1}{2}}_{\frac{1}{4}}$$

Sumamos las rebanas y las mitades de rebanada.



$$\underbrace{5 + 5 + 5}_{15} + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\frac{3}{2}}$$

Expresamos la fracción *impropia* en *notación mixta*.

$$\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Del pan.}} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16 + \frac{1}{2} = 16\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Rebanadas.}}$$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *cuatro*, ya que queremos formar *cuartos* de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r} 5 \\ 4\overline{)\,22} \\ -20 \\ \hline 2 \end{array} \rightarrow \frac{1}{4} = 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

$$\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{Del pan.}} = \frac{\overset{\text{Rebanadas de pan.}}{22}}{\underset{\text{Divididas en 4 partes iguales.}}{4}} = \frac{20+2}{4} = \frac{20}{4} + \frac{2}{4} = 5 + \frac{2}{4} = 5 + \frac{1}{2}$$

Tomamos tres cuartos del total del pan.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} \times 3 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 3}{2} = 15 + \frac{3}{2}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

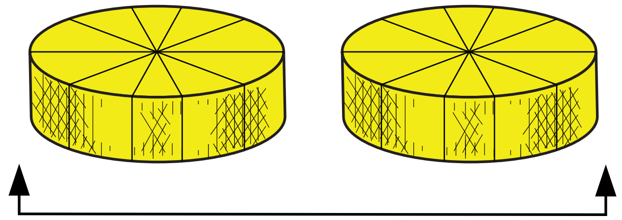
$$\frac{3}{4} = 15 + \frac{3}{2} = 15 + 1 + \frac{1}{2} = 16\frac{1}{2}$$

Otros ejemplos de unidades simples y compuestas combinadas

Otros dos *ejemplos* en los cuales la unidad es *compuesta* y cada una de las partes que la componen son unidades *simples*. Hacemos la solución con dibujos y aritméticamente.

Tenemos dos quesos. Cada uno está dividido en diez rebanadas.

La unidad es compuesta.

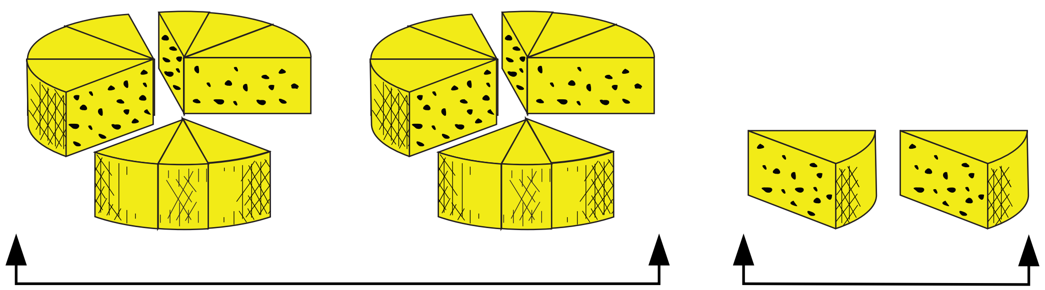


Unidad
Compuesta de 2 quesos.

Primera Pregunta.

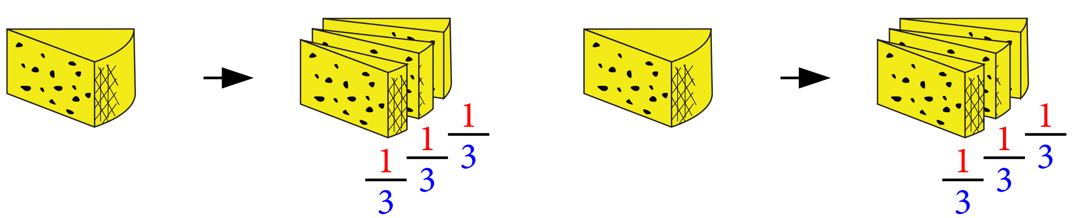
¿Cuántas rebanadas son cinco sextos?

Tenemos que dividir la unidad en *seis partes iguales* en forma, tamaño y cantidad.

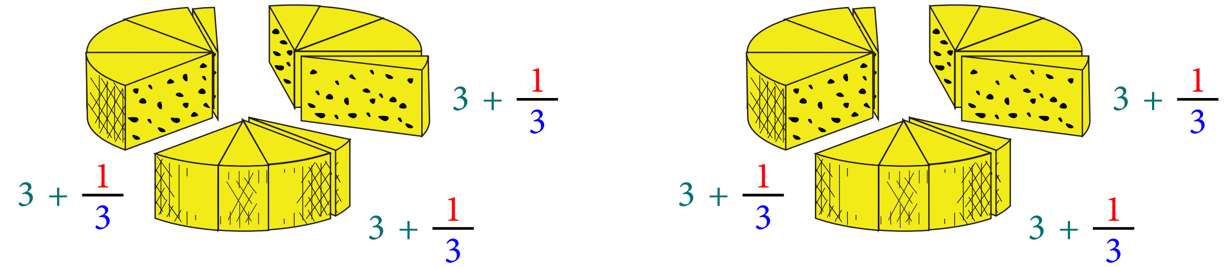


Mismo tamaño, forma y cantidad. Sobran 2 rebanadas.

Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada.

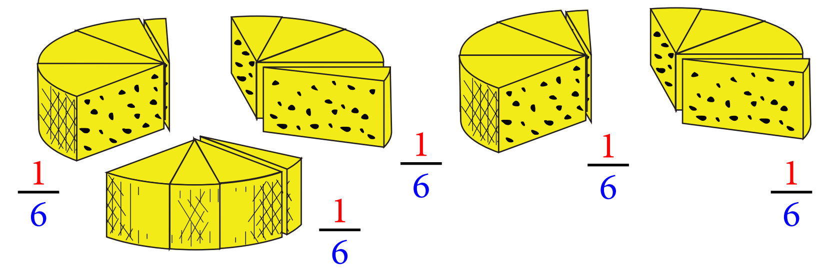


Cada uno de los *seis tercios* de rebanada, lo acomodamos para formar seis fracciones de la misma forma, tamaño y cantidad.

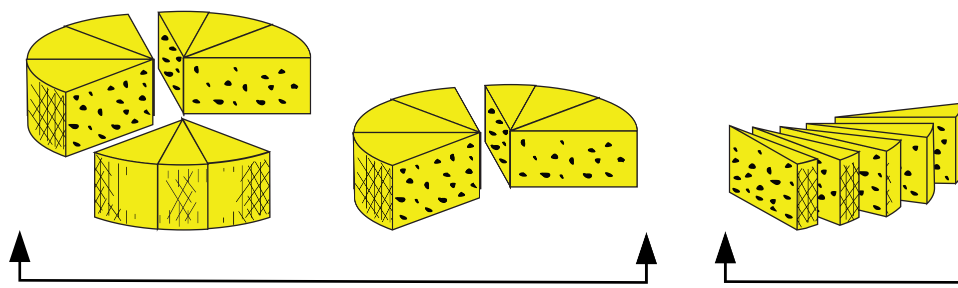


Las *seis* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos cinco sextos del total de las fracciones.



Acomodamos las rebanadas completas y las fracciones de rebanada.



15 rebanadas. $\frac{5}{3}$ De rebanada.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta. $\frac{5}{3} = \frac{3+2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3}$

Efectuamos la suma de fracciones. $15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16 + \frac{2}{3}$

Cinco sextos del total de las rebanadas de los quesos es: $\frac{5}{6} = 16 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *seis*, ya que queremos formar *sextos* de la unidad compuesta.

$$6\,\overline{)\,20}\ \ \text{cociente } 3,\quad -18,\quad \text{residuo } 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

Multiplicamos un sexto de los quesos por 5 para saber cuántas rebanas de queso son cinco sextos.

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 5 \times 3 + \frac{1 \times 5}{3} = 15 + \frac{5}{3}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{5}{3} = 15 + 1 + \frac{2}{3} = 16\,\frac{2}{3}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

Rebanadas de queso.

$$\frac{1}{6} \longrightarrow \frac{20}{6} = \frac{18+2}{6} = \frac{18}{6} + \frac{2}{6} = 3 + \frac{2}{6} = 3 + \frac{1}{3}$$

De los quesos.

Divididas en 6 partes iguales.

Multiplicamos un sexto de los quesos por 5 para saber cuántas rebanas de queso son cinco sextos.

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 5 = 3 \times 5 + \frac{2 \times 5}{6} = 15 + \frac{10}{6}$$

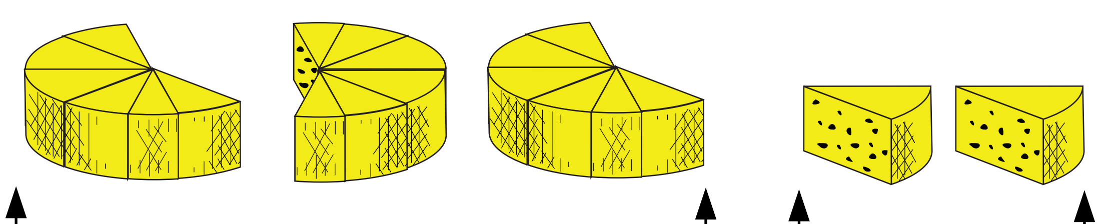
Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{5}{6} = 15 + \frac{10}{6} = 15 + 1 + \frac{4}{6} = 16\,\frac{2}{3}$$

Segunda Pregunta.

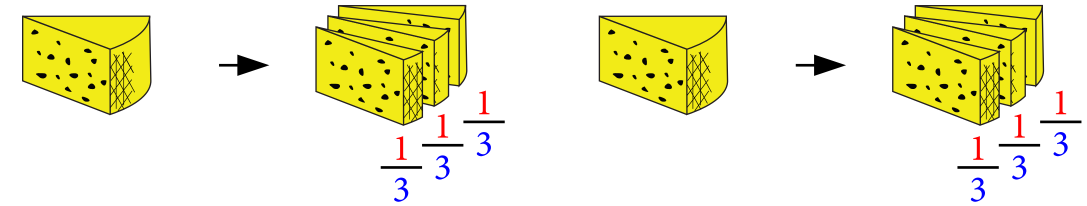
¿Cuántas rebanadas son dos tercios?

Tenemos que dividir la unidad en *tres partes iguales* en forma, tamaño y cantidad.

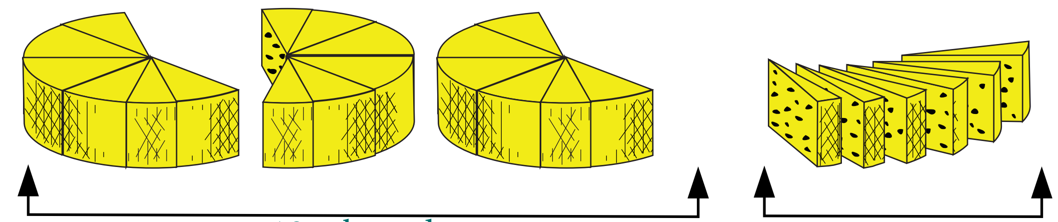


Mismo tamaño, forma y cantidad. Sobran 2 rebanadas.

Cada una de las rebanadas que sobran las dividimos en *tres partes iguales*, para tener *seis tercios* de rebanada y los distribuimos en las tres fracciones.

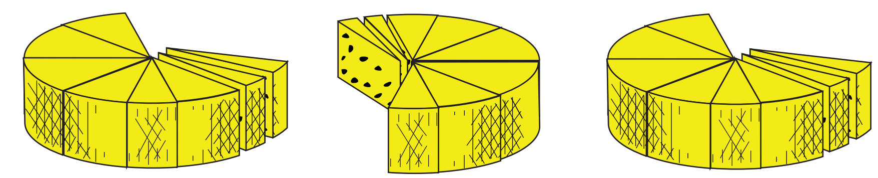


Las *tres partes iguales* tiene en total 18 rebanadas y seis tercios de rebanada.



18 rebanadas. $\frac{6}{3}$ De rebanada.

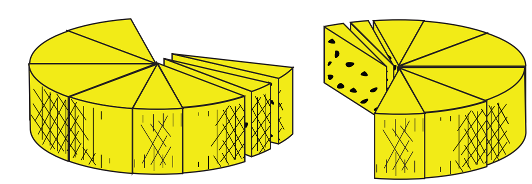
Acomodamos las rebanadas completas y las fracciones de rebanada.



$6 + \frac{2}{3}$ $6 + \frac{2}{3}$ $6 + \frac{2}{3}$

Las *tres* fracciones son iguales en forma, tamaño y cantidad.

Tomamos dos tercios del total de las fracciones.



$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

Fracciones de la unidad simple.

Fracción de la unidad compuesta.

Unidad simple repetida varias veces.

Expresamos la fracción impropia en notación mixta.

$$\frac{4}{3} = \frac{3+1}{3} = \frac{3}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}$$

Efectuamos la suma de fracciones.

$$12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13 + \frac{1}{3}$$

Dos tercios del total de las rebanadas de los quesos es:

$$\frac{2}{3} = 13 + \frac{1}{3} = 13\,\frac{1}{3}$$

Para hacer la solución aritmética dividimos el número total de rebanadas entre *tres*, ya que queremos formar *tercios* de la unidad compuesta.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ 3 & 20 \\ & -18 \\ & 2 \end{array} \longrightarrow \frac{1}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

Multiplicamos un tercio de los quesos por 2 para saber cuántas rebanas de queso son dos tercios.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 6 + \frac{4}{3}$$

Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13\,\frac{1}{3}$$

Podemos también hacer la división utilizando notación de fracción.

Rebanadas de queso.

$$\frac{1}{3} \longrightarrow \frac{20}{3} = \frac{18+2}{3} = \frac{18}{3} + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3} = 6 + \frac{2}{3}$$

De los quesos.

Divididas en 3 partes iguales.

Multiplicamos un tercio de los quesos por 3 para saber cuántas rebanas de queso son dos tercios.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \times 2 = 6 \times 2 + \frac{2 \times 2}{3} = 12 + \frac{4}{3}$$

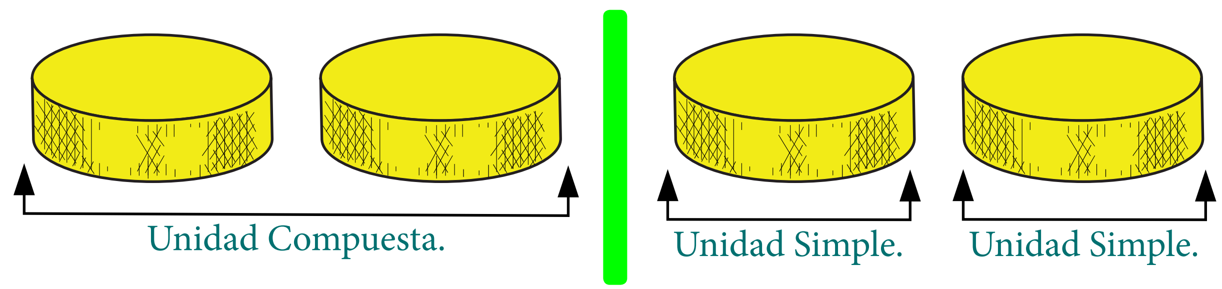
Expresamos la fracción impropia en notación mixta y efectuamos la suma.

$$\frac{2}{3} = 12 + \frac{4}{3} = 12 + 1 + \frac{1}{3} = 13\,\frac{1}{3}$$

Comparación de Unidades Simples Repetidas Varias Veces y Unidades Compuestas

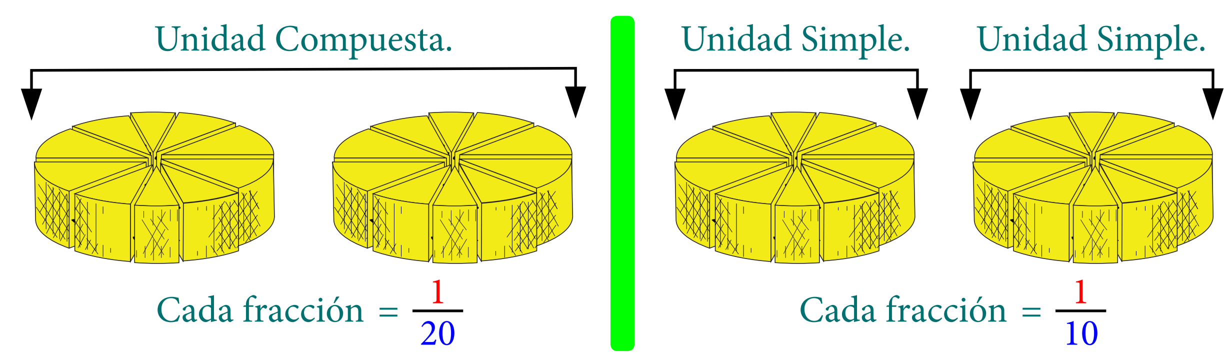
Como hemos visto es muy importante definir claramente la *unidad* antes de hacer las fracciones. De la forma como la *unidad* está definida dependen las fracciones.

Por ejemplo, tenemos *dos quesos*. En el primer caso los dos quesos forman *una unidad compuesta*, y en el segundo caso *cada queso* es *una unidad simple*, es decir, la unidad simple repetida dos veces.



Dividimos cada uno de los quesos en diez partes iguales.

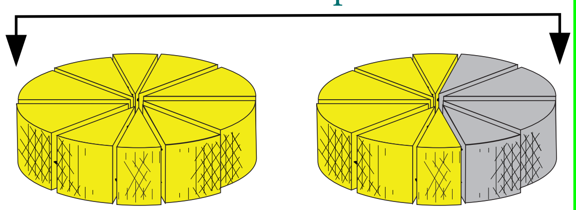
En la unidad *compuesta* cada una de las fracciones es *una* de *veinte*, mientras que en la unidad *simple* repetida dos veces cada una de las fracciones es *una* de *diez*.



En ambos casos queremos conocer que fracción de la unidad es *cuatro quintos*.

En ambos casos *cuatro quintos* representa el *mismo número de rebanadas*, sin embargo *no la misma fracción*, ya que en el primer caso ambos quesos son la unidad y en el segundo caso cada uno de los quesos es una unidad que está repetida.

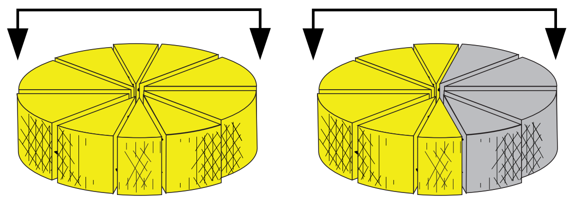
Unidad Compuesta.



Cada fracción $= \frac{1}{20}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$$

Unidad Simple. Unidad Simple.



Cada fracción $= \frac{1}{10}$

$$\frac{4}{5} = \frac{16}{10} = \frac{10+6}{10} = \frac{10}{10} + \frac{6}{10} = 1\frac{6}{10}$$

Números racionales

Un número fraccionarios o fracción es la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$\frac{2}{5}$ ◄ Esta fracción contiene 2 partes,
◄ De un total de 5 partes.

Relación significa lo mismo que la palabra razón, por eso a las fracciones también les llamamos números racionales.

Un número racional expresa la razón o relación que el numerador tiene con el denominador.

Todos los números naturales son racionales, ya que sí podemos expresarlos como la relación entre dos números: el numerador y el denominador.

$$\frac{1}{1} \quad \frac{3}{1} \quad \frac{4}{1} \quad \frac{7}{1} \quad \frac{9}{1} \quad \frac{14}{1} \quad \frac{23}{1} \quad \frac{48}{1} \quad \frac{75}{1} \quad \frac{92}{1} \quad \frac{349}{1} \quad \frac{785}{1} \quad \frac{826}{1}$$

Números irracionales

Cuando un número no es posible expresarlo como la relación o razón del numerador y el denominador, le llamamos *irracional*.

Se llaman *irracionales* por *no* tener una *razón –relación–* entre el numerador y el denominador.

El número irracional más famoso es el número π.

Capítulo 7

Números Fraccionarios
Suma y Resta

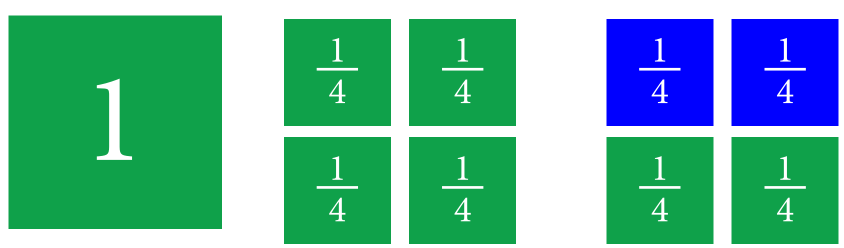
Algoritmo de la Suma y Resta de Fracciones

Tercer Nivel de Abstracción

Concepto de suma y resta de fracciones

Los números fraccionarios están compuestos de numerador y denominador.

El numerador indica la cantidad de partes o fracciones que tomamos y el denominador en cuántas partes hemos dividido la unidad, es decir, de qué tamaño son las fracciones.



$\frac{2}{4}$

Unidad

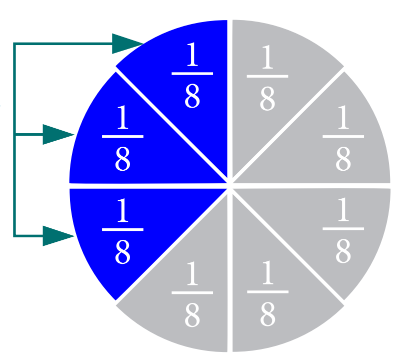
4 Fracciones

La unidad la dividimos en 4 partes.

Tomamos 2 partes, es decir, 2 fracciones.

$\frac{3}{8}$ ← Numerador.
← Denominador.

3 fracciones de tamaño 8.

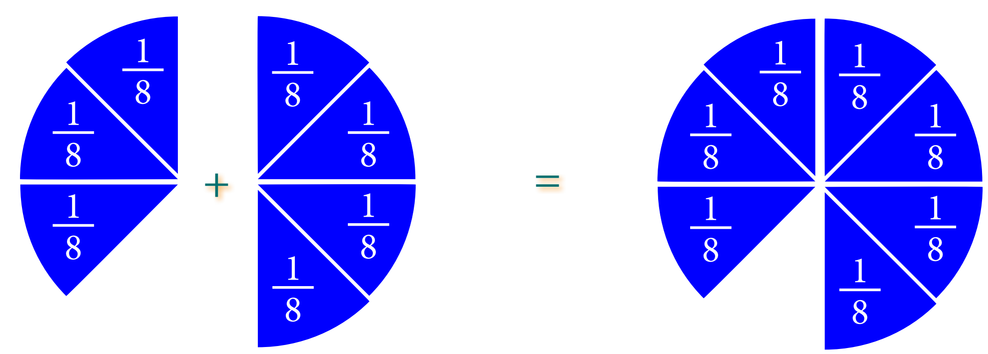


Primer Paso

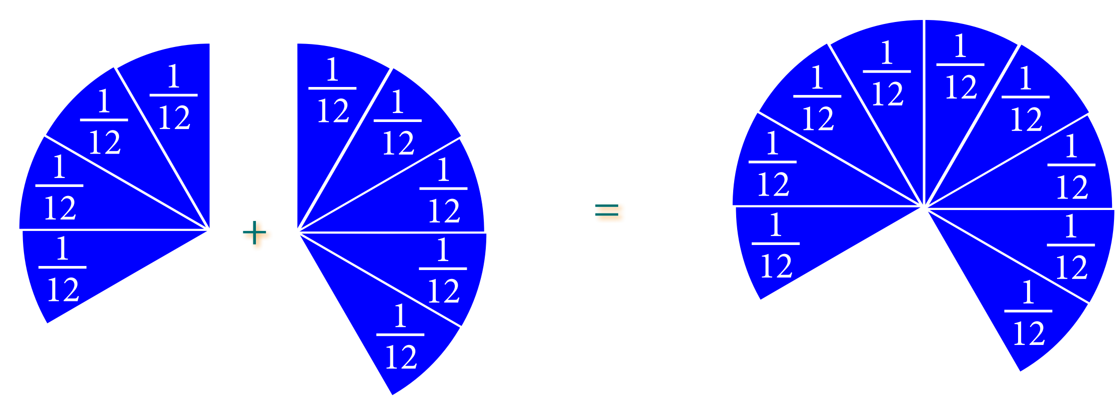
Suma de fracciones del mismo tamaño o mismo denominador

Solamente podemos sumar y restar fracciones que son del mismo tamaño, es decir, que tienen el mismo denominador.

Cuando todas las fracciones que sumamos o restamos tienen el mismo denominador, a este denominador le llamamos común denominador.

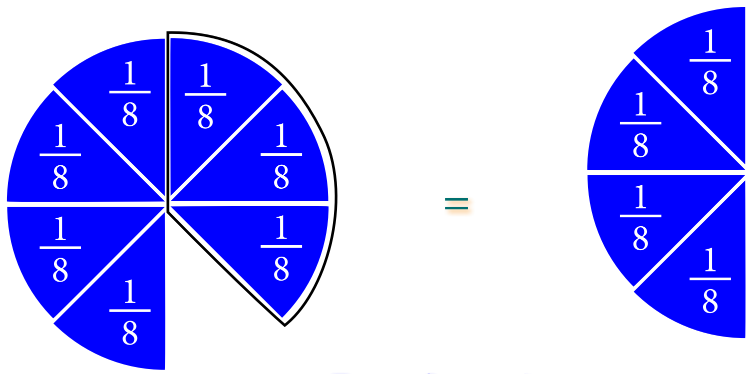


$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$ ← Común denominador.

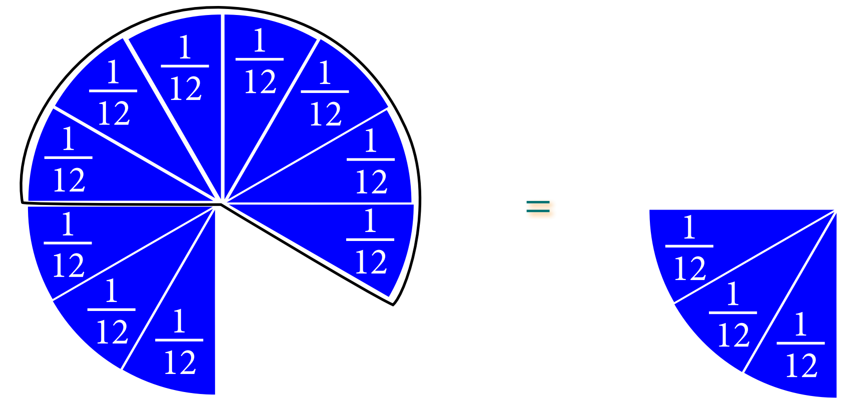


$\frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$ ← Común denominador.

Lo mismo sucede para el caso de la resta. Cuando las fracciones tienen un común denominador, es decir, son del mismo tamaño, se pueden restar.



$$\frac{7}{8} - \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$ ← Común denominador.

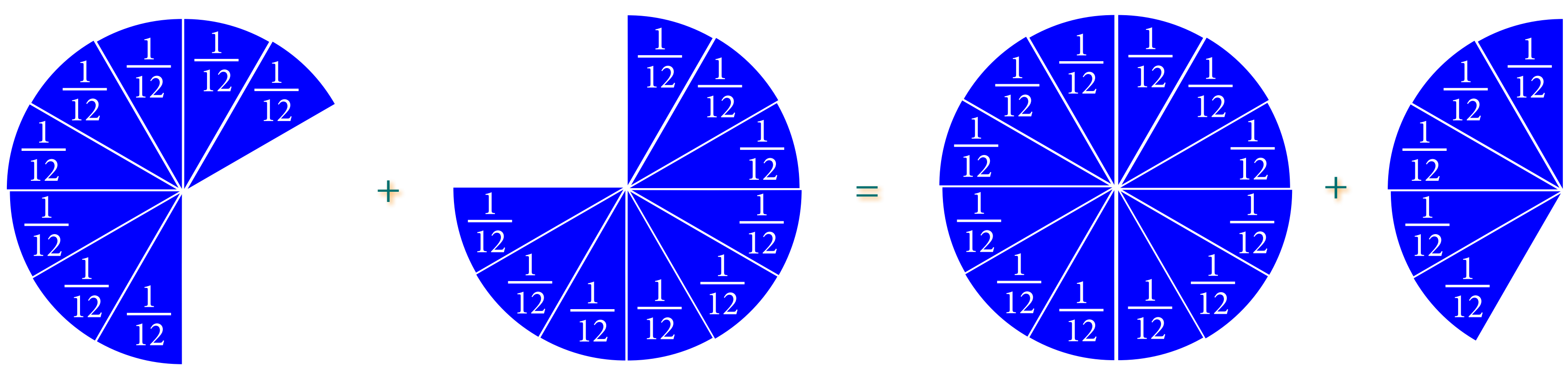


$$\frac{10}{12} - \frac{7}{12} = \frac{3}{12}$$ ← Común denominador.

Segundo Paso

Suma de fracciones impropias

Cuando sumamos fracciones y el resultado es una fracción impropia, utilizamos la notación mixta para expresarlo.

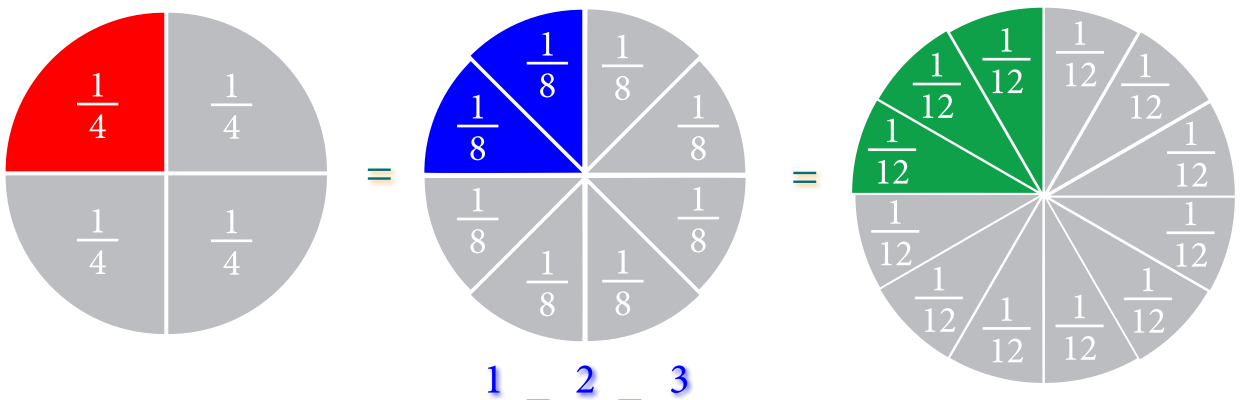


$$\frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12} = \frac{12}{12} + \frac{5}{12} = 1 + \frac{5}{12}$$

Tercer Paso

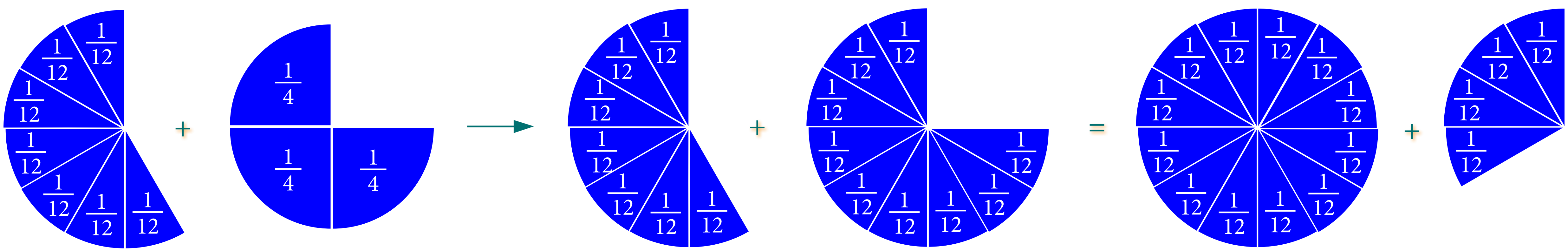
Suma de fracciones cuando los denominadores son diferentes

Cuando los denominadores de las fracciones que queremos sumar son diferentes, utilizamos el concepto de fracción equivalente para hacer todos los denominadores iguales, es decir, el común denominador.



$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12}$$

Sumamos:



$$\frac{7}{12} + \frac{3}{4} \longrightarrow \frac{7}{12} + \frac{9}{12} = \frac{16}{12} = 1 + \frac{4}{12} = 1 + \frac{1}{3}$$

Común
Denominador.

Cuarto Paso

Procedimiento para hacer todos los denominadores iguales

Hacer los denominadores iguales, es decir, con un común denominador, consiste en hacer las fracciones del mismo tamaño, para lo cual multiplicamos el numerador y el denominador por la misma cantidad.

$$\frac{7}{12}+\frac{3}{4}=\frac{7}{12}+\frac{3\times 3}{4\times 3}=\underbrace{\frac{7}{12}+\frac{9}{12}}_{\text{Común Denominador.}}=\frac{16}{12}=\frac{12}{12}+\frac{4}{12}=1+\frac{1}{3}$$

Algoritmo de los cuatro pasos utilizando el método rápido

Para sumar y restar fracciones utilizando el método rápido, aplicamos los siguientes pasos.

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

Sumar las fracciones: $\frac{2}{5}+\frac{7}{10}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

mcd = 10.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{2}{5}+\frac{7}{10}=\frac{2\times 2}{5\times 2}+\frac{7}{10}=\underbrace{\frac{4}{10}+\frac{7}{10}}_{\text{Común Denominador.}}$$

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{4}{10}+\frac{7}{10}=\frac{11}{10}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{11}{10}=\frac{10}{10}+\frac{1}{10}=1+\frac{1}{10}=1\,\frac{1}{10}$$

Restar las fracciones: $\frac{3}{4} - \frac{5}{12}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

mcd = 12.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} - \frac{5}{12} = \frac{9}{12} - \frac{5}{12}$$

Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{9}{12} - \frac{5}{12} = \frac{4}{12}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Quinto Paso

Calcular el mínimo común denominador mentalmente

Sumar las fracciones: $\frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \frac{5}{4}$

Primer paso

Encontrar mentalmente el mínimo común denominador –mcd–.

mcd = 16.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \frac{5}{4} = \frac{3 \times 2}{8 \times 2} + \frac{9}{16} + \frac{5 \times 4}{4 \times 4} = \frac{6}{16} + \frac{9}{16} + \frac{20}{16}$$

Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{6}{16} + \frac{9}{16} + \frac{20}{16} = \frac{35}{16}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{35}{16} = \frac{32}{16} + \frac{3}{16} = 2 + \frac{3}{16} = 2\,\frac{3}{16}$$

Sumar las fracciones: $\frac{5}{2} + \frac{7}{12} + \frac{4}{3}$

Primer paso

Encontrar mentalmente el mínimo común denominador –mcd–.

mcd = 12.

Segundo paso

Multiplicar el numerador y denominador por la cantidad adecuada para que todas las fracciones tengan el mínimo común denominador.

$$\frac{5}{2} + \frac{7}{12} + \frac{4}{3} = \frac{5 \times 6}{2 \times 6} + \frac{7}{12} + \frac{4 \times 4}{3 \times 4} = \frac{30}{12} + \frac{7}{12} + \frac{16}{12}$$

Común Denominador.

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{30}{12} + \frac{7}{12} + \frac{16}{12} = \frac{53}{12}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{53}{12} = \frac{48}{12} + \frac{5}{12} = 4 + \frac{5}{12} = 4\,\frac{5}{12}$$

Sexto Paso

Algoritmo de los cuatro pasos utilizando el método tradicional

Para sumar y restar fracciones utilizando el método tradicional, aplicamos los siguientes pasos.

Sumar las fracciones: $\frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4}$

Primer paso

Encontrar el mínimo común denominador –mcd–.

mcd = 20.

Segundo paso

Dividir el mínimo común denominador entre cada uno de los denominadores y el resultado multiplicarlo por cada uno de los numeradores.

$$\frac{2}{5} + \frac{7}{10} + \frac{3}{4} = \frac{2 \times 4 + 7 \times 2 + 3 \times 5}{20} = \frac{8 + 14 + 15}{20}$$

$$\frac{20}{4} = 5$$

$$\frac{20}{10} = 2$$

$$\frac{20}{5} = 4$$

Tercer paso

Sumar y restar los numeradores.

$$\frac{8 + 14 + 15}{20} = \frac{37}{20}$$

Cuarto paso

Si es posible, expresar el resultado en notación mixta y simplificar.

$$\frac{37}{20} = \frac{20}{20} + \frac{17}{20} = 1 + \frac{17}{20} = 1\,\frac{17}{20}$$

Sumar y restar las fracciones: $\frac{9}{10} + \frac{17}{30} - \frac{6}{15}$

Primer paso

mcd = 30.

Segundo paso

$$\frac{9}{10} + \frac{17}{30} - \frac{6}{15} = \frac{9 \times 3 + 17 \times 1 - 6 \times 2}{30} = \frac{27 + 17 - 12}{30}$$

$$\frac{30}{15} = 2$$

$$\frac{30}{30} = 1$$

$$\frac{30}{10} = 3$$

Tercer paso

$$\frac{27 + 17 - 12}{30} = \frac{32}{30}$$

Cuarto paso

$$\frac{32}{30} \quad \frac{16}{15} = \frac{15}{15} + \frac{1}{15} = 1 + \frac{1}{15} = 1\,\frac{1}{15}$$

Séptimo Paso

Suma y resta de fracciones utilizando el algoritmo de los cinco pasos para encontrar el mínimo común denominador

Calculamos el mínimo común denominador utilizando el algoritmo de los cinco pasos. Sumamos y restamos las fracciones utilizando el método rápido o el método tradicional.

Efectuar la suma de fracciones usando el método rápido. Calcular el mínimo común denominador utilizando el algoritmo de los cinco pasos. Simplificar.

$$\frac{12}{45} + \frac{18}{75}$$

Algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

Primer paso

Descomponemos los números en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Segundo paso

Contamos las veces que se repiten los factores primos.

$$\begin{array}{r|ll} 45 & 3 & \\ 15 & 3 & \text{2 veces.} \\ 5 & 5 & \text{1 vez.} \\ 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 75 & 3 & \text{1 vez.} \\ 25 & 5 & \\ 5 & 5 & \text{2 veces.} \\ 1 & & \end{array}$$

Tercer paso

Seleccionamos un representante de cada uno de los factores primos que no se repiten en ninguno de los números.

Ningún factor no se repite.

Cuarto paso

Escogemos los grupos de factores primos que se repiten más veces.

3, 3 y 5, 5.

Quinto paso

El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados.

$$\text{mcd} = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = 225$$

Utilizamos el método rápido para efectuar la suma de fracciones.

$$\frac{12}{45} + \frac{18}{75} = \frac{12 \times 5}{45 \times 5} + \frac{18 \times 3}{75 \times 3} = \frac{60}{225} + \frac{54}{225} = \frac{114}{225} = \frac{38}{75}$$

Efectuar la resta de fracciones usando el método tradicional. Simplificar. $\frac{9}{24} - \frac{7}{36}$

Algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

Primer paso

Descomponemos los números en sus factores primos.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Segundo paso

Contamos las veces que se repiten los factores primos.

$$\begin{array}{r|ll} 24 & 2 & \\ 12 & 2 & \text{3 veces.} \\ 6 & 2 & \\ 3 & 3 & \text{1 vez.} \\ 1 & & \end{array} \qquad \begin{array}{r|ll} 36 & 2 & \text{2 veces.} \\ 18 & 2 & \\ 9 & 3 & \text{2 veces.} \\ 3 & 3 & \\ 1 & & \end{array}$$

Tercer paso

Seleccionamos un representante de cada uno de los factores primos que no se repiten en ninguno de los números.

Ningún factor no se repite.

Cuarto paso

Escogemos los grupos de factores primos que se repiten más veces. 2, 2, 2 y 3, 3.

Quinto paso

El mínimo común múltiplo –mcm– es el producto de los factores primos seleccionados. $\text{mcd} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 72$

Restamos las fracciones usando el método tradicional.

$$\frac{11}{24} - \frac{7}{36} = \frac{33 - 14}{72} = \frac{19}{72}$$

Octavo Paso

Suma y resta de fracciones en notación mixta

Las fracciones en notación mixta, las expresamos como la suma de la parte entera más la fraccionaria.

Efectuar la suma y resta de fracciones: $3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3}$

Expresamos las fracciones mixtas como la suma de la parte entera más la fraccionaria.

$$3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 3 + \frac{7}{36} + 7 + \frac{14}{27} + 2 + \frac{15}{8} - \frac{2}{3}$$

$$3\frac{7}{36} + 7\frac{14}{27} + 2\frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3}$$

Utilizamos el algoritmo para calcular el mínimo común denominador.

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{2 veces.} \\ \\ \text{2 veces.} \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \text{3 veces.} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad \text{3 veces.}$$

Calculamos el mínimo común denominador.

$$\text{mcd} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 216$$

Utilizamos el método rápido, primero sumamos y restamos las fracciones.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7 \times 6}{36 \times 6} + \frac{14 \times 8}{27 \times 8} + \frac{15 \times 8}{8 \times 8} - \frac{2 \times 72}{3 \times 72}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{42}{216} + \frac{112}{216} + \frac{405}{216} - \frac{144}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{559}{216} - \frac{144}{216} = 12 + \frac{415}{216}$$

Expresamos la fracción en notación mixta.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{216}{216} + \frac{199}{216} = 12 + 1 + \frac{199}{216}$$

Efectuamos la suma y expresamos el resultado en notación mixta.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 13 + \frac{199}{216} = 13\frac{199}{216}$$

Ahora efectuamos la suma y resta de fracciones utilizando el método tradicional.

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{7 \times 6 + 14 \times 8 + 15 \times 8 - 2 \times 72}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{42 + 112 + 405 - 144}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{559 - 144}{216} = 12 + \frac{415}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 12 + \frac{216}{216} + \frac{199}{216} = 12 + 1 + \frac{199}{216}$$

$$12 + \frac{7}{36} + \frac{14}{27} + \frac{15}{8} - \frac{2}{3} = 13 + \frac{199}{216} = 13\frac{199}{216}$$

Capítulo 8

Números Fraccionarios
Multiplicación
División

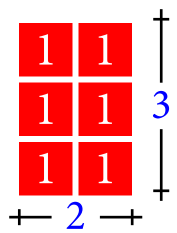
Multiplicación de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

Concepto de la multiplicación de números naturales

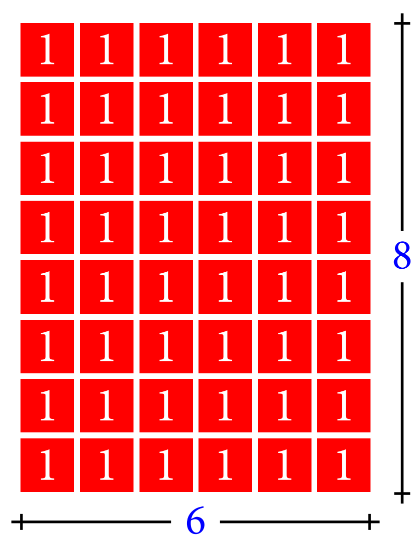
Multiplicar significa sumar en forma rápida las unidades de área (cuadritos) que hay dentro de un cuadrado o un rectángulo. El número de unidades de área (cuadritos) que forman un cuadrado o un rectángulo son el área.

De esta forma creamos las tablas de multiplicar.



Área = 6

$2 \times 3 = 6$



Área = 48

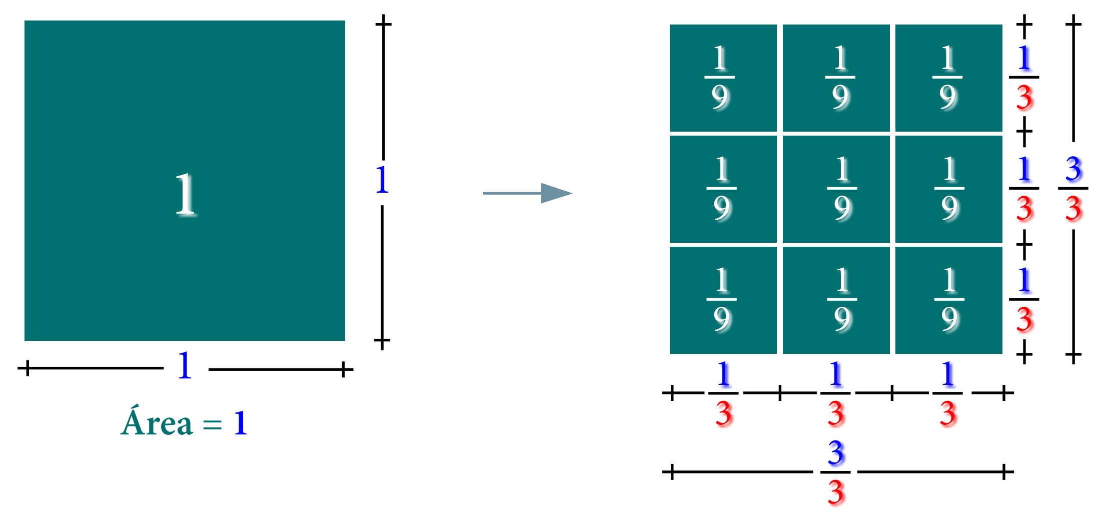
$6 \times 8 = 48$

Concepto de la multiplicación de números fraccionarios

El concepto de la multiplicación de dos números fraccionarios, es el mismo que el de dos números naturales, solamente que, en lugar de formar el área con unidades enteras de área, la formamos con unidades de fracción de área.

Para multiplicar dos números fraccionarios, utilizamos un cuadrado o un rectángulo cuya área total es uno.

Esta área la dividimos en fracciones de área.



Área $= \frac{9}{9} = 1$

Utilizando el concepto de la multiplicación calculamos el área total multiplicando la longitud de la base por la longitud de la altura.

$3 \times 3 = 9$

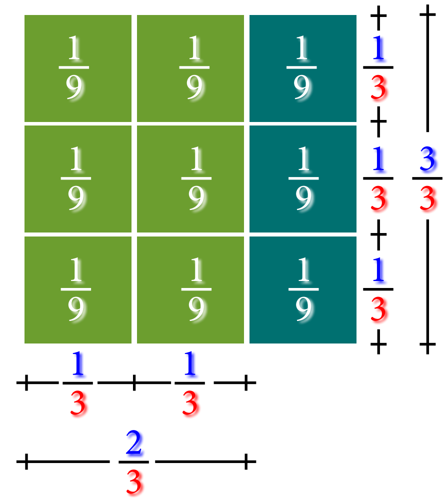
Área $= \frac{3}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{9} = 1$

$3 \times 3 = 9$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

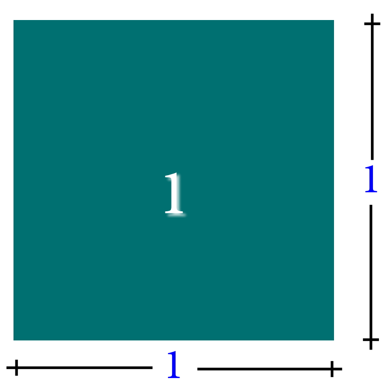
Para verificar que el procedimiento es correcto, tomamos $\frac{6}{9}$ del área total.

$$2 \times 3 = 6$$
$$\text{Área} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{6}{9}$$
$$3 \times 3 = 9$$

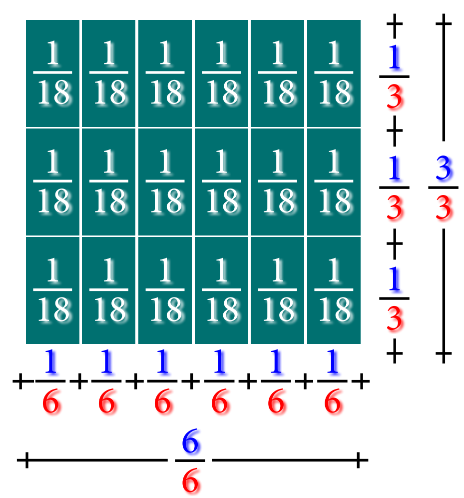


Área $= \frac{6}{9}$

Dividimos la base de la unidad en sextos y la altura en tercios.



Área = 1

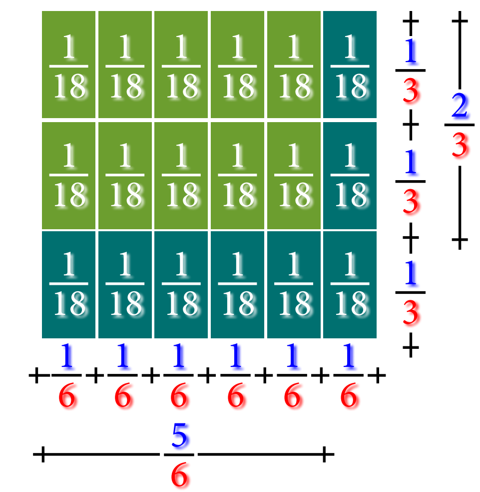


Área $= \frac{18}{18} = 1$

$$6 \times 3 = 18$$
$$\text{Área} = \frac{6}{6} \times \frac{3}{3} = \frac{18}{18} = 1$$
$$6 \times 3 = 18$$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

Para verificar que el procedimiento es correcto, tomamos $\frac{10}{18}$ del área total.



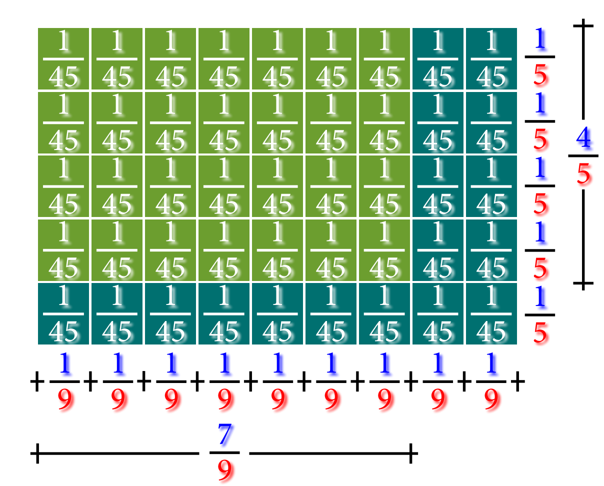
Área $= \frac{10}{18}$

$$5 \times 2 = 10$$
$$\text{Área} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{18}$$
$$6 \times 3 = 18$$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

La unidad puede ser un rectángulo.

Área = 1



Área $= \frac{28}{45}$

$$7 \times 4 = 28$$
$$\text{Área} = \frac{7}{9} \times \frac{4}{5} = \frac{28}{45}$$
$$9 \times 5 = 45$$

Para efectuar la multiplicación de las fracciones, hemos multiplicado los numeradores y los denominadores.

Algoritmo para la multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones utilizamos el siguiente algoritmo.

Primer paso

Multiplicamos los numeradores y el resultado lo escribimos en el numerador; multiplicamos los denominadores y el resultado lo escribimos en el denominador.

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

Multiplicar las fracciones: $\frac{21}{16} \times \frac{8}{7}$

Primer paso

Multiplicamos los numeradores y el resultado lo escribimos en el numerador; multiplicamos los denominadores y el resultado lo escribimos en el denominador.

$$21 \times 8 = 168$$

$$\frac{21}{16} \times \frac{8}{7} = \frac{168}{112}$$

$$16 \times 7 = 112$$

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

$$\frac{168}{112} = \frac{112}{112} + \frac{56}{112} = 1 + \frac{1}{2} = 1\,\frac{1}{2}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{14}{3}$

Primer paso

Multiplicamos los numeradores y el resultado lo escribimos en el numerador; multiplicamos los denominadores y el resultado lo escribimos en el denominador.

$$15 \times 10 \times 14 = 2{,}100$$

$$\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{14}{3} = \frac{2{,}100}{216}$$

$$8 \times 9 \times 3 = 216$$

Segundo paso

Si el resultado es una fracción impropia, la expresamos en notación mixta y simplificamos.

$$\frac{2{,}100}{216} = \frac{1{,}944}{216} + \frac{156}{216} = 9 + \frac{13}{18} = 9\,\frac{13}{18}$$

Simplificación en la multiplicación

Para simplificar una fracción aplicamos el concepto de fracción equivalente, dividiendo el numerador y el denominador por el mismo número.

$$\div 3 \;\; \div 2 \quad \frac{\overset{\overset{2}{\cancel{6}}}{\cancel{12}}}{\underset{\underset{3}{\cancel{9}}}{\cancel{18}}} = \frac{2}{3} \quad \longrightarrow \quad \div 6 \quad \frac{\overset{2}{\cancel{12}}}{\underset{3}{\cancel{18}}} = \frac{2}{3}$$

Para multiplicar fracciones multiplicamos los numeradores y los denominadores. $\frac{25}{12} \times \frac{6}{5} = \frac{25 \times 6}{12 \times 5}$

La multiplicación es una operación conmutativa ya que: $25 \times 6 = 6 \times 25$, por lo cual: $\frac{25 \times 6}{12 \times 5} = \frac{6 \times 25}{12 \times 5}$

Podemos plantear la multiplicación de fracciones de la siguiente forma: $\frac{6 \times 25}{12 \times 5} = \frac{6}{12} \times \frac{25}{5}$

Simplificamos las fracciones antes de efectuar la multiplicación. $\frac{6}{12} \times \frac{25}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{1}$

Efectuamos la multiplicación multiplicando los numeradores y los denominadores. $\frac{1}{2} \times \frac{5}{1} = \frac{5}{2}$

Expresamos el resultado en notación mixta. $\frac{5}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\,\frac{1}{2}$

Sabiendo que tanto en el numerador como en el denominador todos los factores se están multiplicando, podemos hacer directamente la simplificación.

$$\frac{\overset{5}{\cancel{25}}}{\underset{2}{\cancel{12}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{1}{\cancel{5}}} = \frac{5}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{5 \times 1}{2 \times 1} = \frac{5}{2} = 2\,\frac{1}{2}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{15}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{16}{6}$

Sabiendo que tanto en el numerador como en el denominador todos los factores se están multiplicando, podemos hacer directamente la simplificación.

$$\frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{\underset{1}{\cancel{8}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{9} \times \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}} = \frac{5}{1} \times \frac{5}{9} \times \frac{2}{1} = \frac{50}{9} = \frac{45}{9} + \frac{5}{9} = 5 + \frac{5}{9} = 5\,\frac{5}{9}$$

Multiplicar las fracciones: $\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28}$

Vamos a resolver la multiplicación, escribiendo todos los términos del numerador y del denominador.

$$\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28} = \frac{\overset{\overset{1}{\cancel{7}}}{\cancel{21}} \times \overset{1}{3} \times 45 \times \overset{\overset{\overset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{8}}}{\cancel{48}}}{\underset{\underset{\underset{1}{\cancel{2}}}{\cancel{6}}}{\cancel{18}} \times \underset{1}{\cancel{6}} \times \underset{\underset{1}{4}}{\cancel{28}}}$$

$$\frac{21}{18} \times 3 \times \frac{45}{6} \times \frac{48}{28} = 45$$

División de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

Notación de división de fracciones

La división de fracciones podemos indicarla de dos maneras diferentes:

Utilizando notación de fracción.

Numerador.
Raya de quebrado principal.
Denominador.

$$\frac{\frac{6}{5}}{\frac{2}{3}}$$

Utilizando notación de fracción.

$$\frac{6}{5} \div \frac{2}{3}$$

Símbolo de división.

Concepto de la división de números naturales

Multiplicar significa sumar o agrupar las unidades de área (cuadritos) que hay dentro de un cuadrado o un rectángulo.

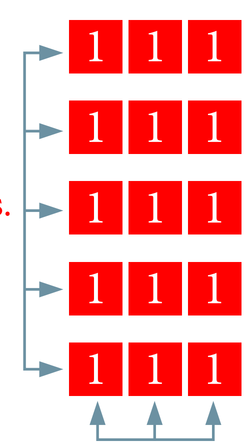
Dividir significa separar en áreas iguales de menor tamaño, el área de un cuadrado o un rectángulo.

Área total.
Número de áreas formadas.

$$\frac{15}{5} = 3$$

Tamaño de cada una de las áreas formadas.

5 áreas.



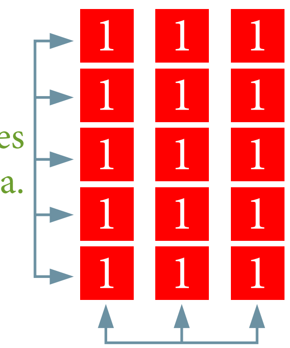
3 unidades cada una.

Área total.
Número de áreas formadas.

$$\frac{15}{3} = 5$$

Tamaño de cada una de las áreas formadas.

5 unidades cada una.



3 áreas.

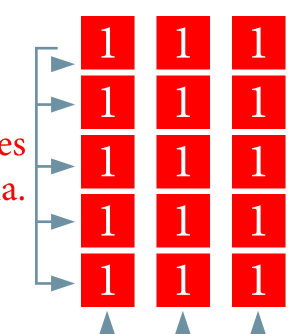
También podemos interpretar la división geométrica de fracciones de la siguiente forma.

Área total.
Tamaño de cada una de las áreas formadas.

$$\frac{15}{5} = 3$$

Total de áreas formadas.

5 unidades cada una.



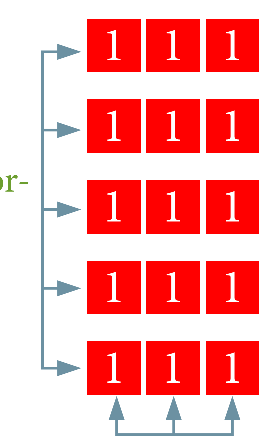
3 áreas formadas.

Área total.
Tamaño de cada una de las áreas formadas.

$$\frac{15}{3} = 5$$

Total de áreas formadas.

5 áreas formadas.

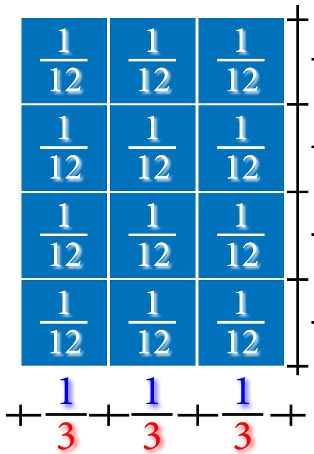


3 unidades cada una.

Concepto de la división de números fraccionarios

En la división de números naturales, el área del cuadrado o del rectángulo está formada de unidades, es decir, cada uno de los cuadritos es una unidad.

En el caso de la división de fracciones, el área del cuadrado o del rectángulo está formada de fracciones de área. El área total del cuadrado o del rectángulo es uno.

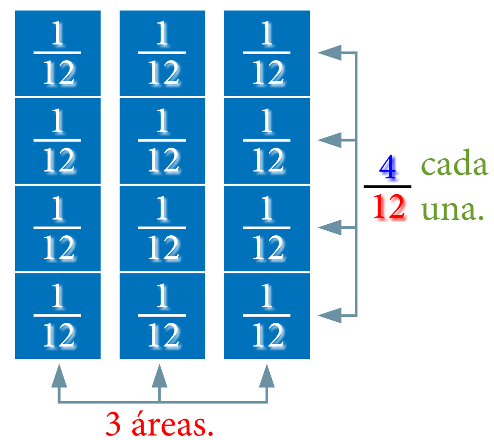


El área total es:

$$\textbf{Área} = \frac{3}{3} \times \frac{4}{4} = \frac{12}{12} = 1$$

Dividimos el área total en 3 áreas iguales.

$$\frac{\frac{12}{12}}{3} \rightarrow \frac{12}{12} \div 3$$



El resultado de la división es: $\frac{\frac{12}{12}}{3} = \frac{4}{12}$

Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:

Extremos | Medios

$$\frac{\frac{12}{12}}{\frac{3}{1}} = \frac{12 \times 1}{12 \times 3} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Extremos

Medios

Otra forma de realizar geométricamente la división, es dividir el área total en áreas de tamaño $\frac{4}{12}$.

En resultado de la división es: $\frac{\frac{12}{12}}{\frac{4}{12}} = 3 \leftarrow$ Total de áreas formadas.

Tamaño de las áreas.

Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:

Extremos

× ×

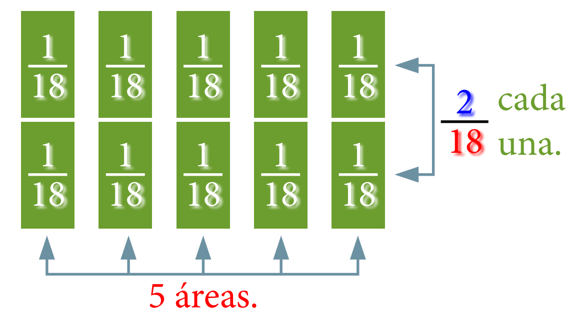
$$\frac{\frac{12}{12}}{\frac{4}{12}} = \frac{12 \times 12}{12 \times 4} = \frac{12}{4} = 3$$

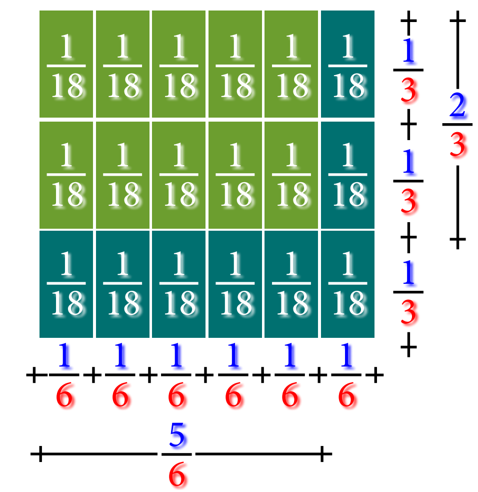
Medios

Dividir las fracciones: $\frac{10}{18} \div \frac{2}{18}$

El área total que queremos dividir es: $\frac{10}{18}$

Queremos dividirla en áreas de tamaño: $\frac{2}{18}$





La división de fracciones la podemos expresar de dos formas: $\frac{\frac{10}{18}}{\frac{2}{18}} = \frac{10}{18} \div \frac{2}{18}$

El resultado de la división es: $\frac{\frac{10}{18}}{\frac{2}{18}} = \frac{10}{18} \div \frac{2}{18} = 5 \leftarrow$ Total de áreas formadas.

Tamaño de las áreas.

Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:

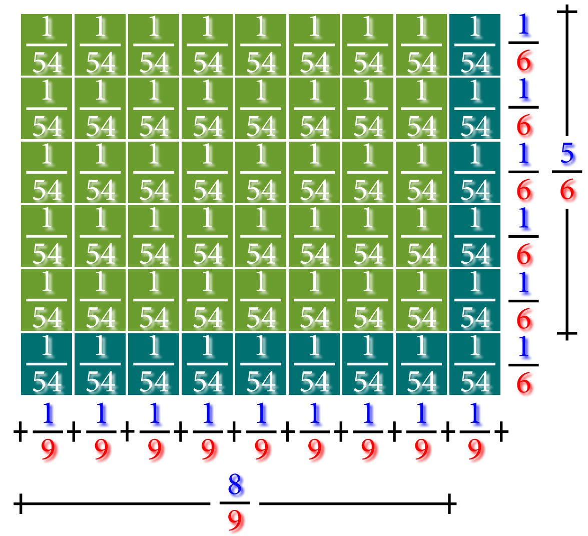
Extremos | Medios

$$\frac{\frac{10}{18}}{\frac{2}{18}} = \frac{10 \times 18}{18 \times 2} = \frac{10}{2} = 5$$

Extremos

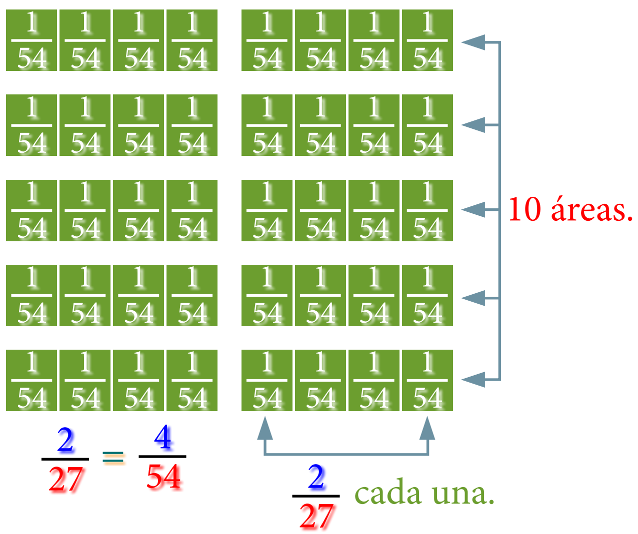
Medios

Dividir las fracciones: $\frac{40}{54} \div \frac{4}{54}$



El área total que queremos dividir es: $\frac{40}{54}$

Queremos dividirla en áreas de tamaño: $\frac{2}{27}$



El resultado de la división es: $\dfrac{\frac{40}{54}}{\frac{2}{27}} = \frac{40}{54} \div \frac{2}{27} = 10$ ← Total de áreas formadas.

Tamaño de las áreas.

Analizando la división y el resultado, nos damos cuenta que:

Extremos | Medios

$$\dfrac{\frac{40}{54}}{\frac{2}{27}} = \frac{40 \times 27}{54 \times 2} = \frac{20}{2} = 10$$

Extremos

Medios

División de fracciones utilizando la fracción recíproca

Ahora que hemos entendido y demostrado la división de fracciones geométricamente, vamos hacer la división utilizando el recíproco del denominador.

Recíproco de una fracción

Recordemos que el recíproco de una fracción, es la fracción que se obtiene al intercambiar el numerador y el denominador de una fracción.

$\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2}$ $\qquad$ $\frac{17}{51} \rightarrow \frac{51}{17}$

Fracción $\quad$ Recíproco $\qquad$ Fracción $\quad$ Recíproco

Al recíproco de una fracción también le llamamos fracción inversa multiplicativa, ya que al multiplicar una fracción por su recíproco, el resultado es siempre 1.

$$\frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{2 \times 5}{5 \times 2} = \frac{10}{10} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{5} \times \frac{5}{2} = 1$$

$$\frac{17}{51} \times \frac{51}{17} = \frac{17 \times 51}{51 \times 17} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{17}{51} \times \frac{51}{17} = 1$$

La estrategia para efectuar la división consiste en hacer que el denominador de la fracción sea 1.

Si multiplicamos el numerador y el denominador por el recíproco del denominador, hacemos el denominador 1.

Ejemplo

Efectuar la división de fracciones, utilizando la fracción recíproca del denominador. $\dfrac{\frac{12}{7}}{\frac{2}{5}}$

Obtenemos el recíproco del denominador. $\frac{2}{5} \rightarrow \frac{5}{2}$

Multiplicamos el numerador y el denominador de la fracción por el recíproco del denominador.

$$\dfrac{\frac{12}{7} \times \frac{5}{2}}{\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{12}{7} \times \frac{5}{2}}{\frac{2 \times 5}{5 \times 2}} = \dfrac{\frac{12}{7} \times \frac{5}{2}}{1} = \frac{12}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{12 \times 5}{7 \times 2} = \frac{30}{7} = 4\,\frac{2}{7}$$

Analizamos el resultado que hemos obtenido.

$$\text{Extremos}\ \ \text{Medios}\ \ \frac{\frac{12}{7}}{\frac{2}{5}} = \overset{\text{Extremos}}{\underset{\text{Medios}}{\frac{12 \times 5}{7 \times 2}}}$$

Es el mismo resultado que obtuvimos haciendo la división geométricamente.

Algoritmos de la división de números fraccionarios

La división de fracciones puede expresarse de dos formas diferentes: utilizando notación de fracción y usando el signo de división.

Utilizando el resultado que hemos obtenido al aplicar el concepto de división de fracciones, vamos a desarrollar dos algoritmos, uno para cada una de las formas de expresar la división de fracciones.

Algoritmos de la división utilizando notación de fracción

Resulta muy sencillo crear el algoritmo, aplicando el concepto de división de fracciones en forma geométrica.

El algoritmo consiste en cuatro pasos.

1. Escribir en el numerador la multiplicación de los extremos de las fracciones: el numerador de la fracción que se encuentra en el numerador y el denominador de la fracción que se encuentra en el denominador.
2. Escribir en el denominador la multiplicación de los medios: el denominador de la fracción que se encuentra en el numerador y el numerador de la fracción que se encuentra en el denominador.
3. Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.
4. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

Ejemplo

Utilizando el algoritmo dividir las fracciones: $\frac{\frac{45}{63}}{\frac{9}{27}}$

Primer paso.

Escribir en el numerador la multiplicación de los extremos de las fracciones: el numerador de la fracción que se encuentra en el numerador y el denominador de la fracción que se encuentra en el denominador.

$$\text{Extremos}\ \ \text{Medios}\ \ \frac{\frac{45}{63}}{\frac{9}{27}} = \overset{\text{Extremos}}{\frac{45 \times 27}{}}$$

Segundo paso.

Escribir en el denominador la multiplicación de los medios: el denominador de la fracción que se encuentra en el numerador y el numerador de la fracción que se encuentra en el denominador.

$$\text{Extremos}\ \ \text{Medios}\ \ \frac{\frac{45}{63}}{\frac{9}{27}} = \overset{\text{Extremos}}{\underset{\text{Medios}}{\frac{45 \times 27}{63 \times 9}}}$$

Tercer paso.

Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.

$$\frac{\frac{45}{63}}{\frac{9}{27}} = \frac{\cancelto{5}{45} \times \cancelto{3}{27}}{\cancelto{7}{63} \times \cancelto{1}{9}} = \frac{15}{7}$$

Cuarto paso.

1. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

$$\frac{15}{7} = \frac{14+1}{7} = \frac{14}{7} + \frac{1}{7} = 2\,\frac{1}{7}$$

Ejemplo

Utilizando el algoritmo dividir las fracciones: $\dfrac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}}$

Primer paso.

Escribir en el numerador la multiplicación de los extremos de las fracciones: el numerador de la fracción que se encuentra en el numerador y el denominador de la fracción que se encuentra en el denominador.

Extremos | Medios

$$\dfrac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \dfrac{\overbrace{49 \times 64}^{\text{Extremos}}}{}$$

Segundo paso.

Escribir en el denominador la multiplicación de los medios: el denominador de la fracción que se encuentra en el numerador y el numerador de la fracción que se encuentra en el denominador.

Extremos | Medios

$$\dfrac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \dfrac{\overbrace{49 \times 64}^{\text{Extremos}}}{\underbrace{35 \times 72}_{\text{Medios}}}$$

Tercer paso.

Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.

$$\dfrac{\frac{49}{35}}{\frac{72}{64}} = \dfrac{\overset{7}{\cancel{49}} \times \overset{8}{\cancel{64}}}{\underset{5}{\cancel{35}} \times \underset{9}{\cancel{72}}} = \dfrac{56}{45}$$

Cuarto paso.

1. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

$$\frac{56}{45} = \frac{45+11}{45} = \frac{45}{45} + \frac{11}{45} = 1\,\frac{11}{45}$$

Algoritmos de la división utilizando notación de división

Para crear el algoritmo analizamos cuidadosamente la división de fracciones utilizando notación de fracción.

Cambiamos el signo de ÷ por el de ×.

$$\dfrac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \times \boxed{5}}{7 \times \boxed{4}} = \frac{15}{28} \longrightarrow \frac{3}{7} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{7} \times \boxed{\frac{5}{4}}$$

Le damos la vuelta a la fracción.

Multiplicar por los extremos y dividir entre los medios, es equivalente a *cambiar* el *signo* de *división* por el de *multiplicación*, y darle la vuelta a la segunda fracción.

A esta forma de efectuar la división de fracciones, en México, le llamamos la *ley de la tortilla*.

Ley de la tortilla

Para calentar una tortilla la ponemos en un comal, la calentamos de un lado y luego le *damos la vuelta* para calentarla del otro. Como hemos demostrado en el ejemplo anterior, para dividir dos fracciones, *cambiamos* el *signo* de la *división* por el de *multiplicación* y le *damos la vuelta* a la *segunda fracción*.

Para que sea fácil recordar la división de fracciones, a esta forma de hacerla, le llamamos la *ley de la tortilla*, ya que tanto al calentar una tortilla como al hacer una división de fracciones, *le damos la vuelta*.

El algoritmo consiste en tres pasos.

1. Cambiar el signo de *división* por el de *multiplicación*. Darle la *vuelta* a la *segunda fracción*.
2. Simplificar los términos y efectuar la multiplicación.
3. Si es posible, se expresa el resultado en notación mixta y se simplifica.

Vamos a demostrar que al efectuar una división de fracciones, el multiplicar los extremos y el resultado dividirlo entre la multiplicación de los medios, es equivalente a cambiar el signo de división por el de multiplicación y darle la vuelta a la segunda fracción.

Notación de fracción.

$$\frac{\frac{27}{20}}{\frac{3}{4}} = \frac{\cancel{27}^{\,9} \times \cancel{4}^{\,1}}{\cancel{20}_{\,5} \times \cancel{3}_{\,1}} = \frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = 1\,\frac{4}{5}$$

Notación con el signo de división.

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{27}{20} \div \frac{3}{4} = \frac{27}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{\cancel{27}^{\,9} \times \cancel{4}^{\,1}}{\cancel{20}_{\,5} \times \cancel{3}_{\,1}} = \frac{9}{5} = \frac{5+4}{5} = \frac{5}{5} + \frac{4}{5} = 1\,\frac{4}{5}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Ejemplo

Efectuar la división de fracciones: $\frac{81}{35} \div \frac{18}{15}$

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{81}{35} \div \frac{18}{15} = \frac{81}{35} \times \frac{15}{18} = \frac{\cancel{81}^{\,9} \times \cancel{15}^{\,3}}{\cancel{35}_{\,7} \times \cancel{18}_{\,2}} = \frac{27}{14} = \frac{14+13}{14} = \frac{14}{14} + \frac{13}{14} = 1\,\frac{13}{14}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Efectuar la división de fracciones: $\frac{72}{21} \div \frac{32}{49}$

Cambiamos el signo
de ÷ por el de ×.

$$\frac{72}{21} \div \frac{32}{49} = \frac{72}{21} \times \frac{49}{32} = \frac{\cancel{72}^{\,9} \times \cancel{49}^{\,7}}{\cancel{21}_{\,3} \times \cancel{32}_{\,4}} = \frac{63}{12} = \frac{60+3}{12} = \frac{60}{12} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{12}} = 5\,\frac{1}{4}$$

Le damos la vuelta
a la fracción.

Comprobación de la Multiplicación y la División de Fracciones

Quinto Nivel de Abstracción

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Multiplicar significa agrupar el área de un cuadrado o rectángulo. Dividir es separar el área que hemos agrupado al multiplicar.

$$5 \times 9 = 45 \longrightarrow \frac{45}{9} = 5 \longrightarrow \frac{45}{5} = 9$$

$$\frac{3}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{35}$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{12}{35}}{\frac{3}{7}} = \frac{12 \times 7}{35 \times 3} = \frac{\cancel{84}^{\,4}}{\cancel{105}_{\,5}} = \frac{4}{5}$$

$$\longrightarrow \frac{\frac{12}{35}}{\frac{4}{5}} = \frac{12 \times 5}{35 \times 4} = \frac{\cancel{60}^{\,3}}{\cancel{140}_{\,7}} = \frac{3}{7}$$

Comprobación de la multiplicación de fracciones

Si el resultado de la multiplicación, lo dividimos entre uno de los multiplicandos, obtenemos el otro multiplicando. De esta manera, podemos verificar que la multiplicación de fracciones es correcta.

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15} \longrightarrow \frac{14}{15} \div \frac{7}{5} = \frac{14}{15} \times \frac{5}{7} = \frac{\cancel{70}^{\,2}}{\cancel{105}_{\,3}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{14}{15} \longrightarrow \frac{14}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{14}{15} \times \frac{3}{2} = \frac{\cancel{42}^{\,7}}{\cancel{30}_{\,5}} = \frac{7}{5}$$

Comprobación de la división de fracciones

Si multiplicamos el divisor por el resultado de la división, obtenemos el dividendo.

$$7\overline{)\,42}\ \ 6 \longrightarrow \frac{42}{7} = 6 \longrightarrow \begin{array}{r} 6 \\ \times\ 7 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{8} \longrightarrow \frac{2}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{24}_{\,12}} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{\frac{5}{12}}{\frac{5}{8}} = \frac{2}{3} \longrightarrow \frac{5}{8} \times \frac{2}{3} = \frac{\cancel{10}^{\,5}}{\cancel{24}_{\,12}} = \frac{5}{12}$$

Capítulo 9

Números Romanos

Proporciones

Regla de Tres

Razones

Sistema Romano de Numeración

Cuarto Nivel de Abstracción

Números romanos

Los números romanos fueron creados hace más de 20 siglos y sirvieron como base para crear otros sistemas numéricos, como es el caso del sistema de numeración decimal.

En la actualidad los utilizamos para describir fechas, hacer listados, clasificar volúmenes de enciclopedias, etcétera. Por lo tanto, es de gran valor cultural el que desarrollemos la habilidad para leer y escribir números en notación romana.

El sistema numérico decimal es un sistema posicional que utiliza únicamente 10 símbolos, y la posición del dígito en las columnas numéricas determina su valor. Esta característica nos permite crear algoritmos para resolver las operaciones básicas.

En el sistema de numeración romano, cada número se representa con un símbolo diferente, por lo cual, no es útil para realizar operaciones aritméticas. Sin embargo, su valor histórico es muy importante.

Símbolos utilizados en los números romanos

La notación romana cuenta con siete símbolos, más seis símbolos derivados de estos, que al combinarlos nos permiten escribir todos los números.

Los símbolos y su equivalencia en el sistema decimal son:

Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1
V	→	5
X	→	10
L	→	50
C	→	100
D	→	500
M	→	1,000

Multiplicar por mil

Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

Usando estos trece símbolos: los siete símbolos y los seis símbolos con una raya encima, creamos todo el universo numérico.

Multiplicar por mil

Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

Símbolo Romano		Valor Equivalente	Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1			
V	→	5	C	→	100
$\overline{V}$	→	5,000	$\overline{C}$	→	100,000
X	→	10	D	→	500
$\overline{X}$	→	10,000	$\overline{D}$	→	500,000
L	→	50	M	→	1,000
$\overline{L}$	→	50,000	$\overline{M}$	→	1,000,000

Procedimiento para escribir números romanos

El sistema de numeración romano no cuenta con el cero, ya que no es un sistema posicional, por lo cual, para escribir números tenemos que sumar o restar los símbolos.

Para escribir números en notación romana, es importante tomar en cuenta las siguientes reglas:

1. Repetir los símbolos I (1), X (10), C (100), M(1,000) es equivalente a sumar las cantidades que representan.
2. Los símbolos I (1), X (10), C (100), M(1,000) no pueden repetirse más de tres veces.

I	→	1
II	→	1 + 1 = 2
III	→	1 + 1 + 1 = 3

X	→	10
XX	→	10 + 10 = 20
XXX	→	10 + 10 + 10 = 30

C	→	100
CC	→	100 + 100 = 200
CCC	→	100 + 100 + 100 = 300

M	→	1,000
MM	→	1,000 + 1,000 = 2,000
MMM	→	1,000 + 1,000 + 1,000 = 3,000

3. Los símbolos V (5), L (50) y D (500) no se repiten. Solamente pueden escribirse una vez.

V	→	5
L	→	50
D	→	500

4. Los doce símbolos que hemos creado y que aparecen en azul, son las unidades básicas que utilizamos para construir los números.

V	→	5
L	→	50
D	→	500

C	→	100
CC	→	200
CCC	→	300

X	→	10
XX	→	20
XXX	→	30

M	→	1,000
MM	→	2,000
MMM	→	3,000

5. Un símbolo o varios símbolos de menor valor colocado a la derecha de otro de mayor valor (unidad básica) se suman.

V I	→	5 + 1 = 6	X I	→	10 + 1 = 11
V I I	→	5 + 2 = 7	X I I	→	10 + 2 = 12
V I I I	→	5 + 3 = 8	X I I I	→	10 + 3 = 13

X V	→	10 + 5 = 15
X V I	→	10 + 6 = 16
X X V I I	→	20 + 7 = 27
X X X V I I I	→	30 + 8 = 38

L X V	→	50 + 10 + 5 = 65
L X V I I	→	50 + 10 + 5 + 2 = 67
L X X X V I I I	→	50 + 30 + 5 + 3 = 88

C X V I I	→	100 + 10 + 5 + 2 = 117
C C L X X V I I I	→	200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 278
C C C L X X X V I I I	→	300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 388

D L X X X V I I	→	500 + 50 + 30 + 5 + 2 = 587
D C C L X X V I I I	→	500 + 200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 778
D C C C L X X X V I I I	→	500 + 300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 888

M D C L X X V I I → 1,000 + 500 + 100 + 50 + 20 + 5 + 2 = 1,677

M M D C C L X V I I I → 2,000 + 500 + 200 + 50 + 20 + 5 + 3 = 2,768

M M M D C C C L X X X V I I I → 3,000 + 500 + 300 + 50 + 30 + 5 + 3 = 3,888

6. Un símbolo (solamente uno) de menor valor colocado a la izquierda de uno de mayor valor (unidad básica) se resta.

I V → 5 − 1 = 4

I X → 10 − 1 = 9

X L → 50 − 10 = 40

X C → 100 − 10 = 90

C D → 500 − 100 = 400

C M → 1,000 − 100 = 900

I V	→	4
I X	→	9
X L	→	40

X C	→	90
C D	→	400
C M	→	900

X I V → 10 + 5 − 1 = 14

X I X → 10 + 10 − 1 = 19

X X I V → 20 + 5 − 1 = 24

X X I X → 20 + 10 − 1 = 29

X X X I X → 30 + 10 − 1 = 39

X L I X → 50 − 10 + 10 − 1 = 49

C X C → 100 + 100 − 10 = 190

C C X C → 200 + 100 − 10 = 290

C D X C → 500 − 100 + 100 − 10 = 490

D C D X C → 500 + 500 − 100 + 100 − 10 = 990

M C M → 1,000 + 1,000 − 100 = 1,900

M M C M X L → 2,000 + 1,000 − 100 + 50 − 10 = 2,940

Para entender y demostrar la dinámica del sistema de numeración romana, escribimos los primeros 150 números.

1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX
10	X	20	XX	30	XXX	40	XL

41	XLI	51	LI	61	LXI	71	LXXI
42	XLII	52	LII	62	LXII	72	LXXII
43	XLIII	53	LIII	63	LXIII	73	LXXIII
44	XLIV	54	LIV	64	LXIV	74	LXXIV
45	XLV	55	LV	65	LXV	75	LXXV
46	XLVI	56	LVI	66	LXVI	76	LXXVI
47	XLVII	57	LVII	67	LXVII	77	LXXVII
48	XLVIII	58	LVIII	68	LXVIII	78	LXXVIII
49	XLIX	59	LIX	69	LXIX	79	LXXIX
50	L	60	LX	70	LXX	80	LXXX

81	LXXXI	91	XCI	101	CI	111	CXI
82	LXXXII	92	XCII	102	CII	112	CXII
83	LXXXIII	93	XCIII	103	CIII	113	CXIII
84	LXXXIV	94	XCIV	104	CIV	114	CXIV
85	LXXXV	95	XCV	105	CV	115	CXV
86	LXXXVI	96	XCVI	106	CVI	116	CXVI
87	LXXXVII	97	XCVII	107	CVII	117	CXVII
88	LXXXVIII	98	XCVIII	108	CVIII	118	CXVIII
89	LXXXIX	99	XCIX	109	CIX	119	CXIX
90	XC	100	C	110	CX	120	CXX

121	CXXI	131	CXXXI	141	CXLI
122	CXXII	132	CXXXII	142	CXLII
123	CXXIII	133	CXXXIII	143	CXLIII
124	CXXIV	134	CXXXIV	144	CXLIV
125	CXXV	135	CXXXV	145	CXLV
126	CXXVI	136	CXXXVI	146	CXLVI
127	CXXVII	137	CXXXVII	147	CXLVII
128	CXXVIII	138	CXXXVIII	148	CXLVIII
129	CXXIX	139	CXXXIX	149	CXLIX
130	CXXX	140	CXL	150	CL

Siguiendo este procedimiento podemos escribir cualquier número en notación romana.

El número más grande que podemos escribir, sin utilizar la raya encima del símbolo, es 3,999.

MMMCMXCIX → **3,999**

Escribir una raya encima del símbolo, significa multiplicar el valor del símbolo por 1,000.

$\overline{\text{IV}}$ → **4,000** $\overline{\text{IX}}$ → **9,000**

Utilizando la raya encima del símbolo, podemos escribir cualquier número sin importar su valor.

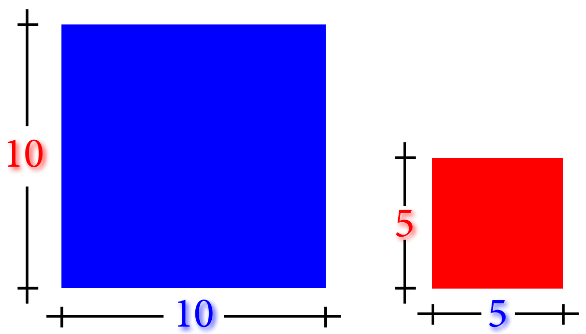
4,794	$\overline{\text{IV}}$DCCXCIV
8,278	$\overline{\text{V}}$MMMCCLXXVIII
9,367	$\overline{\text{IX}}$CCCLXVII
12,649	$\overline{\text{X}}$MMDCXLIX
73,985	$\overline{\text{LXX}}$MMMCMLXXXV

Proporciones

Quinto Nivel de Abstracción

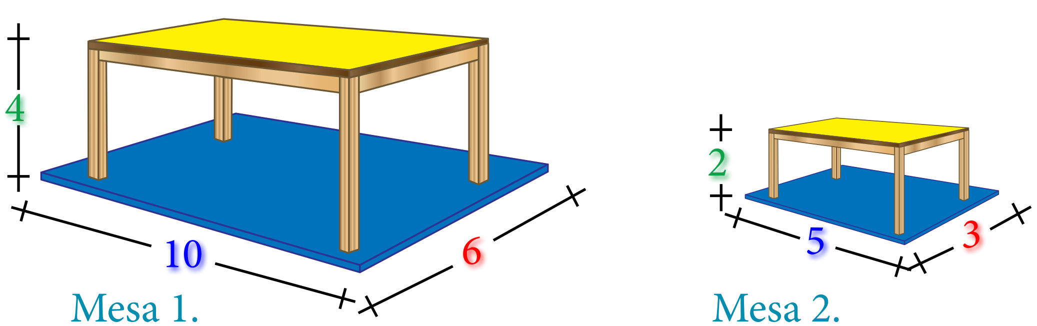
Concepto de proporcionalidad

Cuando dos objetos o dos figuras geométricas son iguales pero de diferente tamaño, les llamamos proporcionales.



Los dos cuadrados son iguales, exactamente iguales, pero el cuadrado rojo es exactamente la mitad del cuadrado azul.

Los cuadrados son proporcionales.



Mesa 1. Mesa 2.

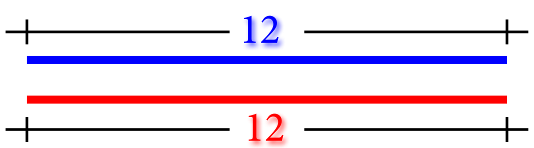
Las dos mesas son iguales, exactamente iguales, pero la mesa 1 es dos veces más grande que la mesa 2.

Las mesas son proporcionales.

Para entender y demostrar qué significa la proporcionalidad, primero vamos a utilizar una recta.

Rectas iguales

Dos rectas son iguales, cuando las dos tienen la misma longitud.

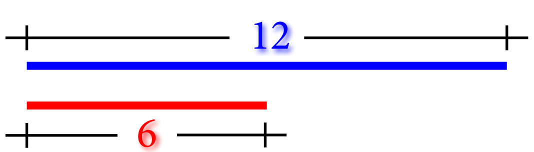


Rectas iguales.

Rectas proporcionales

Dos rectas son proporcionales, cuando tienen diferente longitud.

La recta roja es la *mitad* de la recta azul, o la recta azul es el *doble* de la recta roja.



Rectas proporcionales.

Constante de proporcionales

La constante de proporcionalidad es un número, que puede ser entero o fraccionario, que indica la relación que guardan las recta. La constante de proporcionalidad la indicamos con la letra k.

Para establecer la constante de proporcionalidad, primero debemos elegir una de las rectas como referencia, ya que podemos decir que la recta roja es la *mitad* de la recta azul, o la recta azul es el *doble* de la recta roja.

Tomar la longitud l_1 de la recta azul como referencia, significa indicar qué proporción de la recta azul es la recta roja. En este caso, la recta roja es la *mitad* de la recta azul.

$l_1 = 12$

$l_2 = 6$

Para calcular la constante de proporcionalidad, utilizamos una fracción. En el denominador escribimos la longitud de la recta que usamos como referencia.

$$k_1 = \frac{6}{12} \rightarrow k_1 = \frac{1}{2}$$

Constante de proporcionalidad.

Conociendo la longitud l_1 de la recta azul (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_1, podemos conocer la longitud l_2 de la recta roja.

$$l_2 = l_1 \times k_1 = 12 \times \frac{1}{2} = \frac{12 \times 1}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

Si tomamos la longitud l_2 de la recta roja como referencia, entonces indicamos qué proporción de la recta roja es la recta azul. En este caso, la recta azul es el *doble* de la recta roja.

Para calcular la constante de proporcionalidad, utilizamos una fracción. En el denominador escribimos la longitud de la recta que usamos como referencia.

$$k_2 = \frac{12}{6} \rightarrow k_2 = 2$$

Constante de proporcionalidad.

Conociendo la longitud l_2 de la recta roja (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_2, podemos conocer la longitud l_1 de la recta azul.

$$l_1 = l_2 \times k_2 = 6 \times 2 = 12$$

Ejemplo

Calcular la constante de proporcionalidad k_1, tomando como referencia la longitud l_1, de la recta azul y la constante k_2 utilizando como referencia la longitud l_2 de la recta roja.

$l_1 = 18$

$l_2 = 6$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{6}{18} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2.

$$k_2 = \frac{18}{6} \rightarrow k_2 = 3$$

Conociendo la longitud l_1 de la recta azul (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_1, podemos conocer la longitud l_2 de la recta roja.

$$l_2 = l_1 \times k_1 = 18 \times \frac{1}{3} = \frac{18 \times 1}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

Conociendo la longitud l_2 de la recta roja (recta de referencia) y el valor de la constante de proporcionalidad k_2, podemos conocer la longitud l_1 de la recta azul.

$$l_1 = l_2 \times k_2 = 6 \times 3 = 18$$

Dos pares de rectas proporcionales

Cuando dos pares de rectas proporcionales tienen la misma constante de proporcionalidad, entonces podemos establecer una relación de proporcionalidad entre los dos pares de rectas.

Par de rectas 1.

$l_1 = 18$

$l_2 = 12$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{12}{18} \rightarrow k_1 = \frac{2}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

$$k_2 = \frac{18}{12} \rightarrow k_2 = \frac{3}{2}$$

Par de rectas 2.

$l_1 = 9$

$l_2 = 6$

Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1 .

$$k_1 = \frac{6}{9} \rightarrow k_1 = \frac{2}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2 .

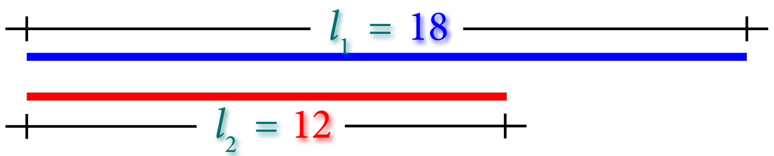
$$k_2 = \frac{9}{6} \rightarrow k_2 = \frac{3}{2}$$

Tanto el par de rectas 1 como el par de rectas 2 tienen la misma constante de proporcionalidad.

$$k_1 = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{3}{2}$$

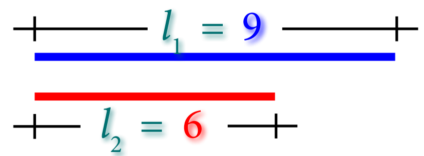
Debido a que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad, podemos establecer una relación de proporcionalidad entre los dos pares de rectas.

Par de rectas 1.



$$k_1 = \frac{12}{18}$$

Par de rectas 2.



$$k_2 = \frac{6}{9}$$

$$k_1 = k_2 \rightarrow k = \frac{12}{18} = \frac{6}{9}$$

Fracciones equivalentes.

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 12 es a 18 como 6 es a 9.

como

es a $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$ es a

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 18 es a 12 como 9 es a 6.

como

es a $\frac{18}{12} = \frac{9}{6}$ es a

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Debido a que la constante de proporcionalidad entre los dos pares de rectas es la misma, también podemos establecer la proporcionalidad entre las rectas correspondientes de los dos pares de rectas.

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Tomamos como referencia la recta l_1 del par de rectas 1.

como

es a $\frac{9}{18} = \frac{6}{12}$ es a

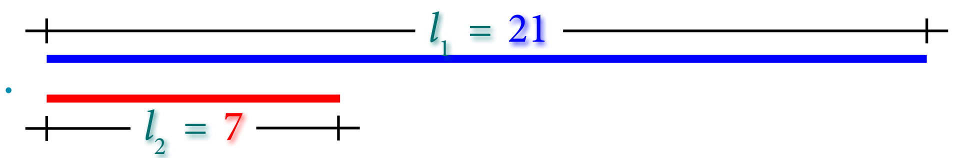
Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Ahora, tomamos como referencia la recta l_2 del par de rectas 2.

como

es a $\frac{18}{9} = \frac{12}{6}$ es a

Ejemplo

Par de rectas 1.



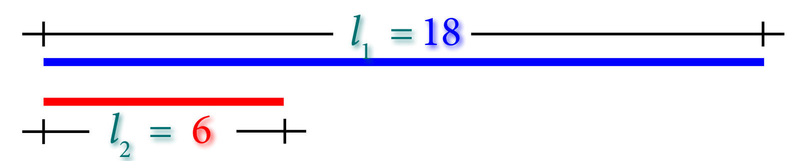
Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1.

$$k_1 = \frac{7}{21} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2.

$$k_2 = \frac{21}{7} \rightarrow k_2 = 3$$

Par de rectas 2.



Tomamos primero la longitud l_1 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_1.

$$k_1 = \frac{6}{18} \rightarrow k_1 = \frac{1}{3}$$

Tomamos primero la longitud l_2 como referencia y calculamos la constante de proporcionalidad k_2.

$$k_2 = \frac{18}{6} \rightarrow k_2 = 3$$

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 7 es a 21 como 6 es a 18.

como

es a $\frac{7}{21} = \frac{6}{18}$ es a

Para indicar que los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad o que las fracciones son equivalentes, establecemos la relación de proporcionalidad diciendo que 21 es a 7 como 18 es a 6.

como

es a $\frac{21}{7} = \frac{18}{6}$ es a

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Debido a que la constante de proporcionalidad entre los dos pares de rectas es la misma, también podemos establecer la proporcionalidad entre las rectas correspondientes de los dos pares de rectas.

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Tomamos como referencia la recta l_1 del par de rectas 1.

como

es a $\dfrac{18}{21} = \dfrac{6}{7}$ es a

Establecemos la proporcionalidad entre la recta l_1 del *par de rectas 1* y la recta l_1 del *par de rectas 2*, y la proporcionalidad entre la recta l_2 del par de rectas 1 y la recta l_2 del par de rectas 2. Ahora, tomamos como referencia la recta l_2.

como

es a $\dfrac{21}{18} = \dfrac{7}{6}$ es a

Cuando establecemos una relación de proporcionalidad porque tenemos dos pares de rectas con la misma constante de proporcionalidad, podemos calcular la longitud desconocida de alguna de las rectas.

Para hacerlo utilizamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.

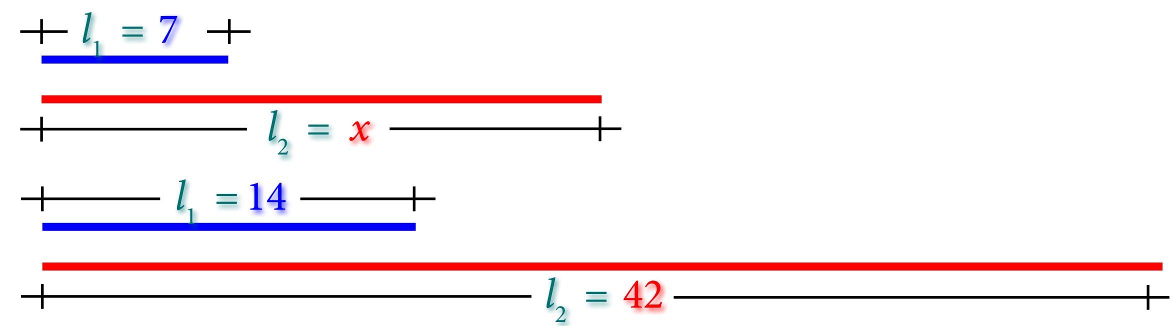
$$\frac{28}{4} = 7 \longrightarrow 28 = 7 \times 4$$

$$\frac{24}{6} = \frac{12}{3} \longrightarrow 24 = \frac{12}{3} \times 6 \longrightarrow 24 = 4 \times 6 \longrightarrow 24 = 24$$

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{14} \times 7 \longrightarrow x = \frac{42 \times 7}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

Ejemplo

El valor de la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es el mismo, determinar la longitud desconocida x de la recta roja.



Calculamos la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas, utilizando en ambos pares de rectas como recta de referencia, la recta cuya longitud conocemos.

Par de rectas 1.

$$k_1 = \frac{x}{7}$$

Par de rectas 2.

$$k_2 = \frac{42}{14}$$

La constante de proporcionalidad de ambos pares de rectas es la misma.

$$k_1 = k_2 = \frac{x}{7} = \frac{42}{14}$$

Proporcionalidad de los dos pares de rectas

Usamos la constante de proporcionalidad, para obtener el valor de la recta desconocida. Aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para conocer el valor de la longitud desconocida x.

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{14} \times 7 \longrightarrow x = \frac{42 \times 7}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

Proporcionalidad entre los dos pares de rectas

Ahora utilizamos la proporcionalidad entre los dos pares de rectas para obtener el valor de la recta desconocida. Aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para conocer el valor de la longitud desconocida x.

$$\frac{x}{42} = \frac{7}{14} \longrightarrow x = \frac{7}{14} \times 42 \longrightarrow x = \frac{7 \times 42}{14} \longrightarrow x = \frac{42}{2} \longrightarrow x = 21$$

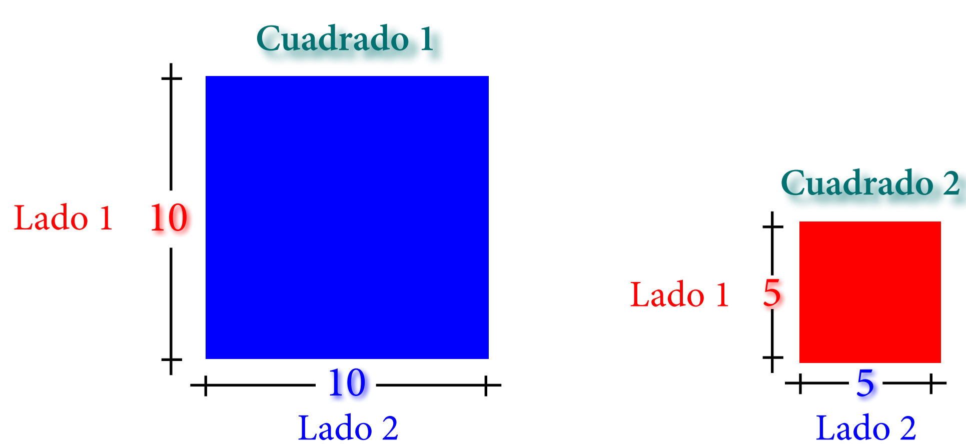
Proporciones

Sexto Nivel de Abstracción

Figuras geométricas proporcionales o semejantes

Dos figuras geométricas son proporcionales o semejantes cuando todos sus lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad, es decir, cuando su constante de proporcionalidad k es la misma.

Cuadrados



Para que los dos cuadrados sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Cuadrado 1.

$$k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{10}{10} = 1$$

Cuadrado 2.

$$k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{5}{5} = 1 \rightarrow k_1 = k_2 = 1$$

La constante de proporcionalidad es la misma, por lo tanto, ambos cuadrados son proporcionales.

Todos los cuadrados son proporcionales

Todos los cuadrados son proporcionales, ya que la constante de proporcionalidad entre los lados de todos los cuadrados es 1.

Constante de proporcionalidad entre dos cuadrados

Para conocer la constante de proporcionalidad entre dos cuadrados, seguimos el mismo procedimiento que usamos entre dos rectas.

Escogemos el cuadrado 2 como referencia.

Constante de proporcionalidad del lado 1.

Lado 1.

$$k_1 = \frac{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 1}}}{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 1}}} = \frac{10}{5} = 2$$

Lado 2.

$$k_2 = \frac{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 2}}}{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 2}}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$k_1 = k_2 = 1$$

Ahora escogemos el cuadrado 1 como referencia.

Lado 1.

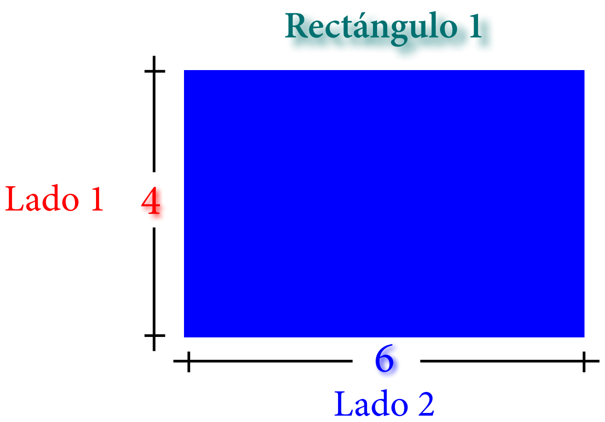
$$k_1 = \frac{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 1}}}{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 1}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

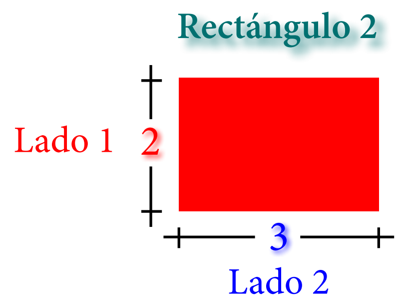
Lado 2.

$$k_2 = \frac{\text{Cuadrado } 2_{\text{Lado 2}}}{\text{Cuadrado } 1_{\text{Lado 2}}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

Rectángulos





Para que los dos rectángulos sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Rectángulo 1. **Rectángulo 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{2}{3} \longrightarrow k_1 = k_2 = \frac{2}{3}$$

La constante de proporcionalidad es la misma, por lo tanto, ambos rectángulos son proporcionales.

Constante de proporcionalidad entre dos rectángulos

Para conocer la constante de proporcionalidad entre dos rectángulos, seguimos el mismo procedimiento que usamos entre dos rectas.

Escogemos el rectángulo 2 como referencia.

Constante de proporcionalidad del lado 1.

Lado 1. **Lado 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 1}}}{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 1}}} = \frac{4}{2} = 2 \qquad k_2 = \frac{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 2}}}{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 2}}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$k_1 = k_2 = 2$$

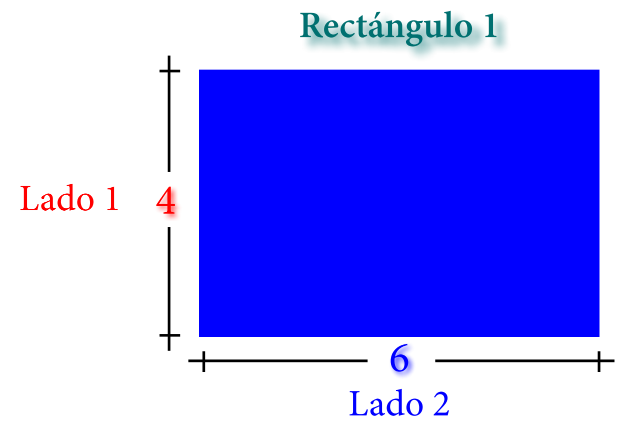
Ahora escogemos el rectángulo 1 como referencia.

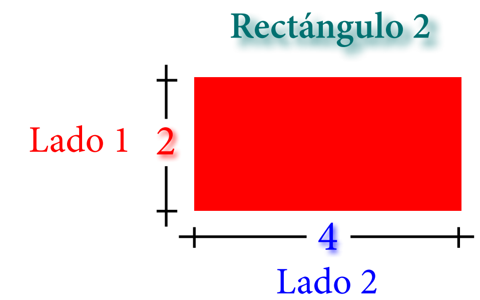
Lado 1. **Lado 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 1}}}{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 1}}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad k_2 = \frac{\text{Rectángulo } 2_{\text{Lado 2}}}{\text{Rectángulo } 1_{\text{Lado 2}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

No todos los rectángulos son proporcionales o semejantes.





Para que los dos rectángulos sean proporcionales, se requiere que la constante de proporcionalidad entre sus lados sea la misma.

Rectángulo 1. **Rectángulo 2.**

$$k_1 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k_1 = \frac{2}{3} \qquad k_2 = \frac{1}{2} \longrightarrow k_1 \neq k_2$$

La constante de proporcionalidad de los rectángulos es diferente, por lo tanto, no son proporcionales o semejantes.

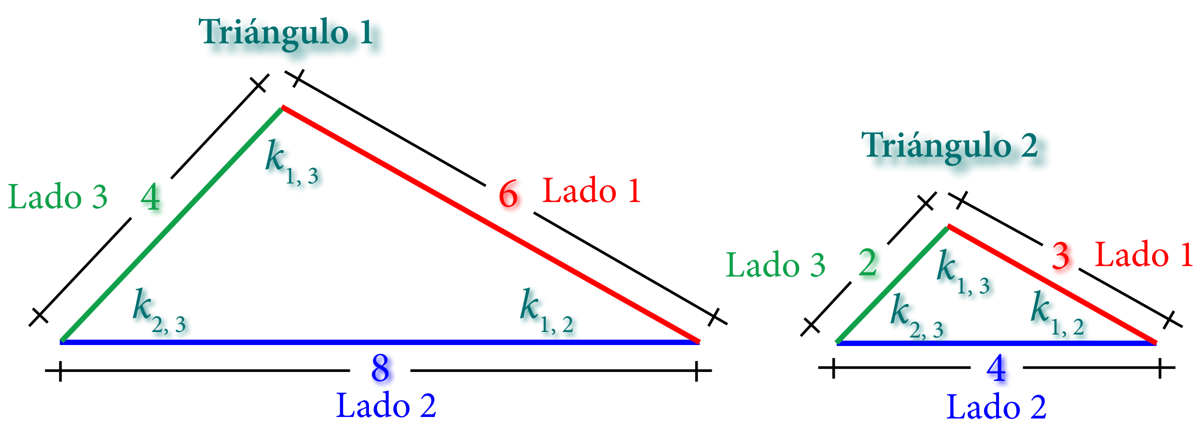
Triángulos

Dos triángulos son semejantes o proporcionales si son iguales en su forma, es decir, son homogéneos aunque diferentes de tamaño.

Por lo cual, dos triángulos son semejantes o proporcionales cuando los tres pares de lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Ejemplo

Calcular la constante de proporcionalidad de los tres pares de lados correspondientes de ambos triángulos. Verificar que las constantes de proporcionalidad son iguales en ambos triángulos, y por lo tanto, los triángulos son proporcionales o semejantes.



Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Triángulo 1.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{3}{4} \rightarrow k_{1,2} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 1.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{3}{2} \rightarrow k_{1,3} = \frac{3}{2}$$

Triángulo 1.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{8}{4} = 2$$

Triángulo 2.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow k_{2,3} = 2$$

Proporcionalidad entre los lados correspondientes de dos triángulos

Una vez que hemos verificado que los triángulos son proporcionales, podemos establecer la proporcionalidad entre los lados correspondientes de los dos triángulos.

Tomado como referencia el triángulo 2.

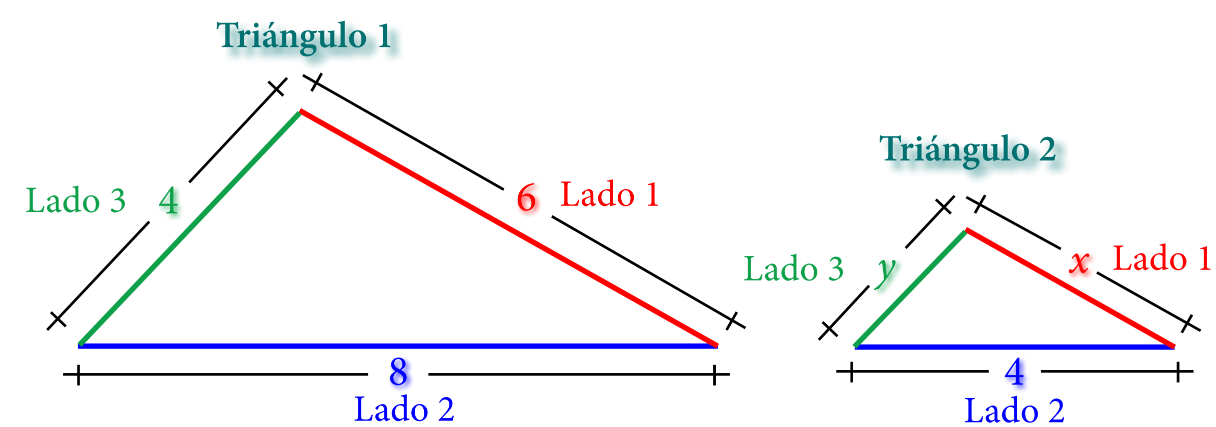
$$\frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \rightarrow \frac{8}{4} = \frac{4}{2} \rightarrow \frac{6}{3} = \frac{4}{2}$$

Tomado como referencia el triángulo 1.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow \frac{4}{8} = \frac{2}{4} \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{4}$$

Ejemplo

Sabemos que los dos triángulos son proporcionales o semejantes, determinar la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde.



Como sabemos que los triángulos son proporcionales o semejantes, podemos calcular la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde estableciendo la proporcionalidad de los lados correspondientes.

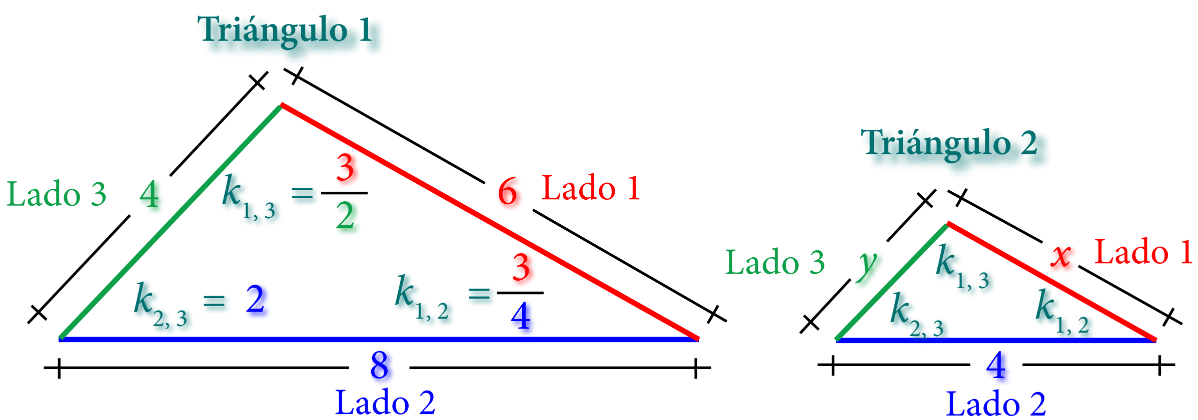
$$\frac{x}{6} = \frac{4}{8} \rightarrow x = \frac{4}{8} \times 6 \rightarrow x = \frac{4 \times 6}{8} \rightarrow x = 3$$

$\times$

$$\frac{y}{4} = \frac{4}{8} \rightarrow y = \frac{4}{8} \times 4 \rightarrow y = \frac{4 \times 4}{8} \rightarrow y = 2$$

$\times$

En el ejemplo anterior, calculamos las constantes de proporcionalidad de los tres pares de lados correspondientes. Porque los triángulos son semejantes, las constantes de proporcionalidad de ambos triángulos son iguales. Conociendo las constantes de proporcionalidad de un triángulo, las usamos en el otro para determinar la longitud desconocida x del lado rojo y la longitud desconocida y del lado verde.



$$k_{1,2} = \frac{3}{4} = \frac{x}{4} \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{3}{4} \times 4 \rightarrow x = \frac{3 \times 4}{4}$$

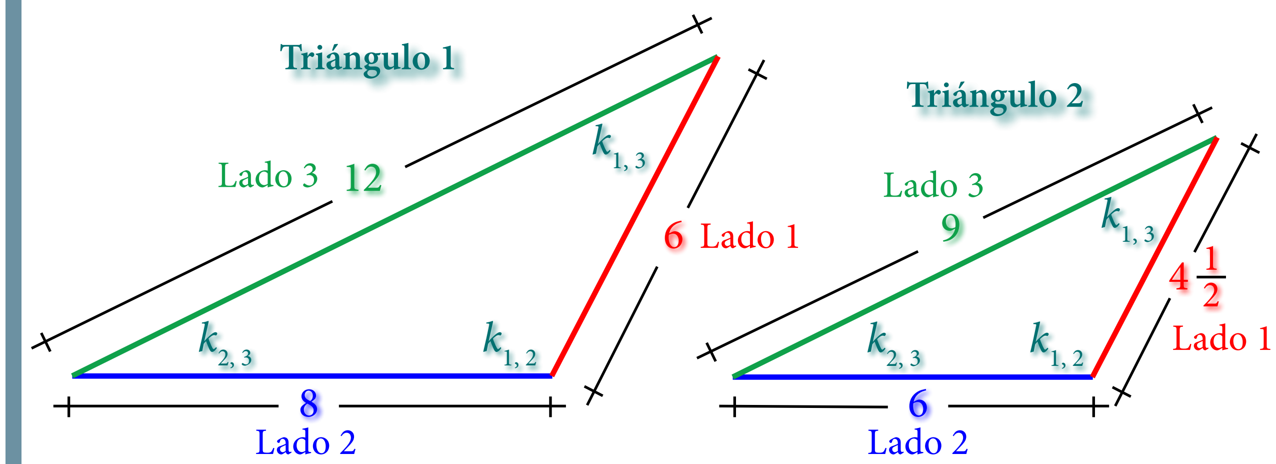
$$\rightarrow x = 3$$

$$k_{2,3} = 2 = \frac{4}{y} \rightarrow \frac{4}{y} = 2 \rightarrow \frac{y}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow y = \frac{1}{2} \times 4$$

$$y = \frac{1 \times 4}{2} \rightarrow y = 2$$

Ejemplo

Verificar que los triángulos son semejantes o proporcionales.



Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Triángulo 1.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4\frac{1}{2}}{6} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{8}{2} + \frac{1}{2}}{6} = \frac{\frac{9}{2}}{6}$$

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \rightarrow k_{1,2} = \frac{3}{4}$$

Triángulo 1.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

Triángulo 2.

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{4\frac{1}{2}}{9} = \frac{4 + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{8}{2} + \frac{1}{2}}{9} = \frac{\frac{9}{2}}{9}$$

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \rightarrow k_{1,3} = \frac{1}{2}$$

Triángulo 1.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

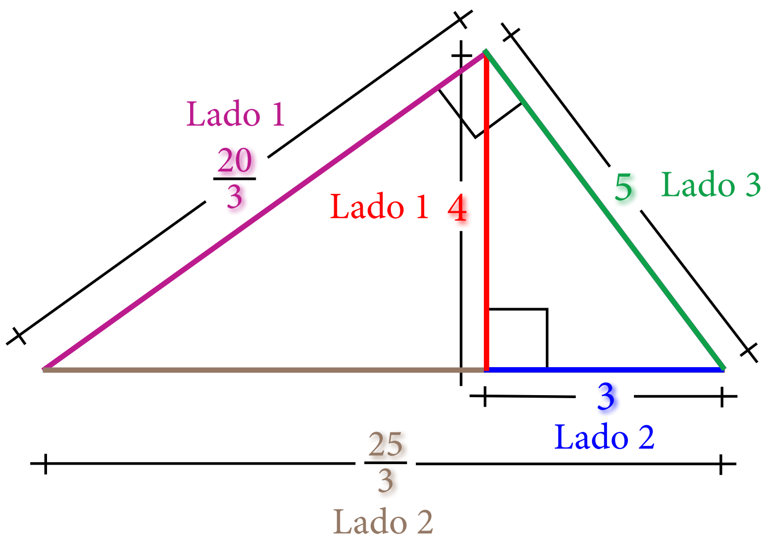
Triángulo 2.

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \rightarrow k_{2,3} = \frac{2}{3}$$

Los triángulos son semejantes o proporcionales ya que los lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

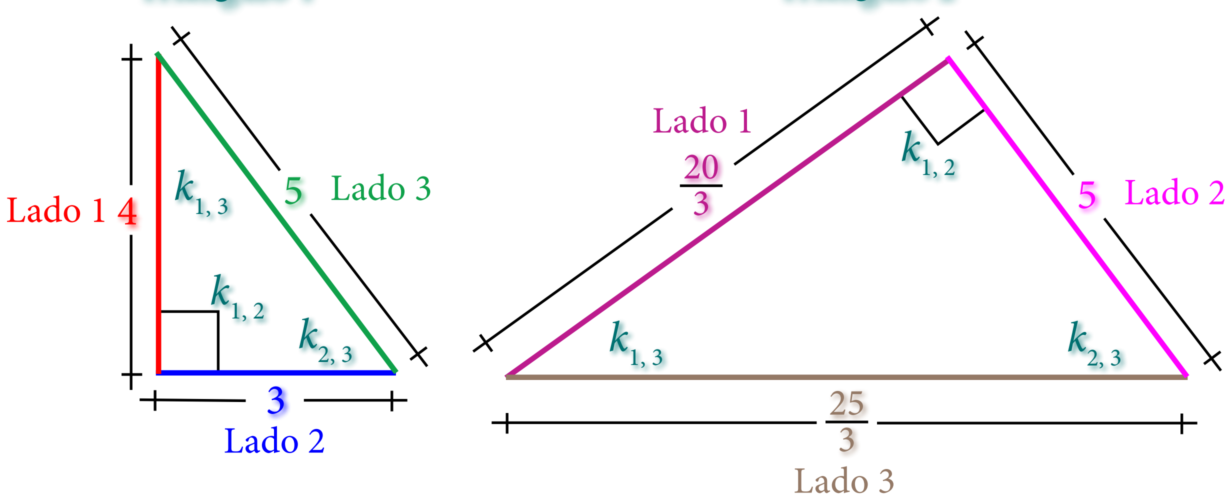
Ejemplo

Demostrar que el triángulo: $\frac{20}{3}$, $\frac{25}{3}$, 5 es semejante al triángulo: 3, 4, 5.



Para visualizar mejor el triángulo 1 y el triángulo 2, los dibujamos en forma separada.

Triángulo 1 **Triángulo 2**



Para identificar los lados correspondientes de los dos triángulos, utilizamos el ángulo recto como referencia.

El ángulo recto está formado por dos catetos, uno mayor al otro. Identificamos como *lado 1* al cateto más grande y *lado 2* al cateto menor.

El *lado 3*, es la hipotenusa de los triángulos.

Calculamos las constantes de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos.

Utilizamos el ángulo recto para localizar los lados correspondientes.

Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{4}{3} \qquad k_{1,2} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 2}} = \frac{\frac{20}{3}}{5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{5}$$

$$k_{1,2} = \frac{4}{3} = \frac{4}{5}$$

Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{4}{5} \qquad k_{1,3} = \frac{\text{Lado 1}}{\text{Lado 3}} = \frac{\frac{20}{3}}{\frac{25}{3}} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$k_{1,3} = \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

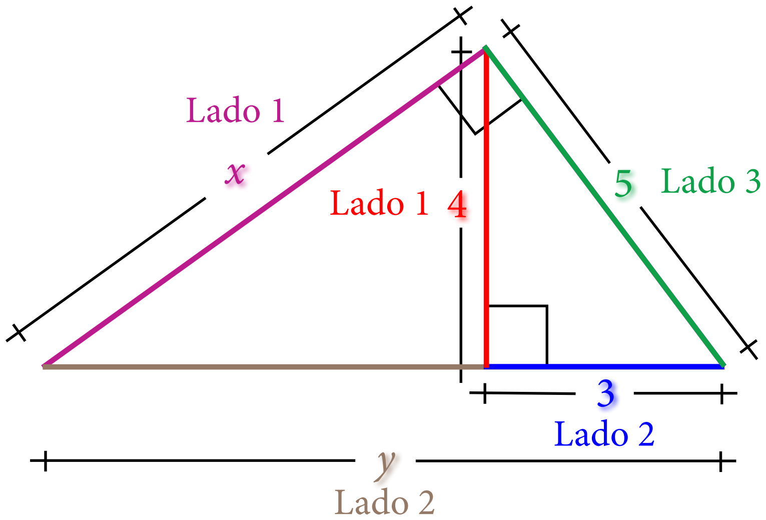
Triángulo 1. **Triángulo 2.**

$$k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{3}{5} \qquad k_{2,3} = \frac{\text{Lado 2}}{\text{Lado 3}} = \frac{5}{\frac{25}{3}} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}$$

$$k_{2,3} = \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

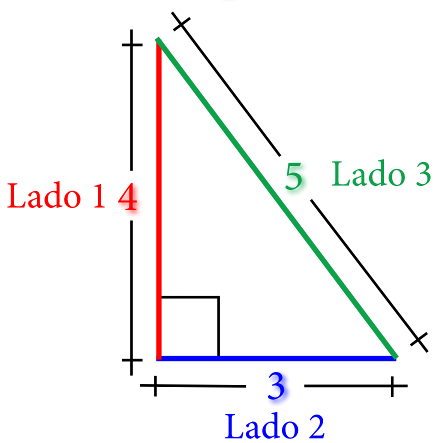
Los triángulos son semejantes o proporcionales ya que los lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Ahora que sabemos que los triángulos son semejantes o proporcionales, conociendo las dimensiones de alguno de los triángulos, podemos calcular las dimensiones del otro.

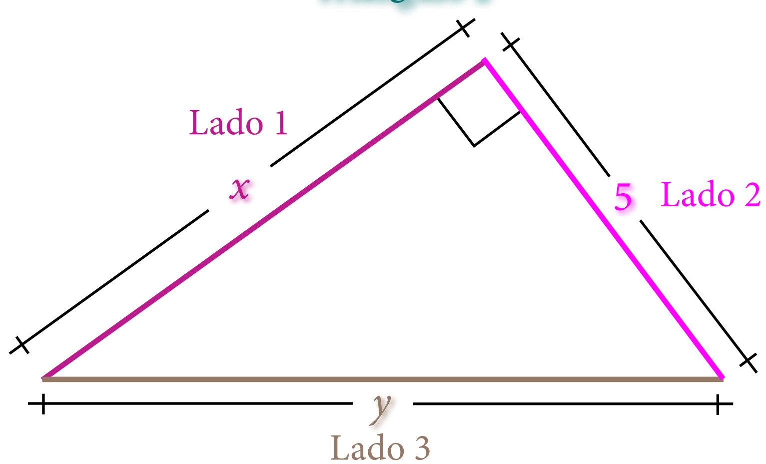


Para visualizar mejor el triángulo 1 y el triángulo 2, los dibujamos en forma separada.

Triángulo 1



Triángulo 2



Como sabemos que los triángulos son proporcionales o semejantes, podemos calcular la longitud desconocida *x* del lado 1 y la longitud desconocida *y* del lado 3 estableciendo la proporcionalidad de los lados correspondientes.

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{3} \rightarrow x = \frac{5}{3} \times 4 \rightarrow x = \frac{5 \times 4}{3} \rightarrow x = \frac{20}{3}$$

$$\frac{y}{5} = \frac{5}{3} \rightarrow y = \frac{5}{3} \times 5 \rightarrow x = \frac{5 \times 5}{3} \rightarrow x = \frac{25}{3}$$

Regla de Tres

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Aplicaciones de las proporciones

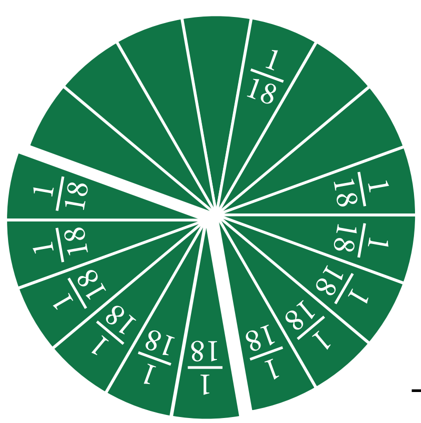
Las proporciones las aplicamos para resolver problemas. La más importante de las aplicaciones es la regla de tres. Otras aplicaciones son la razón y la distribución proporcional.

Regla de tres

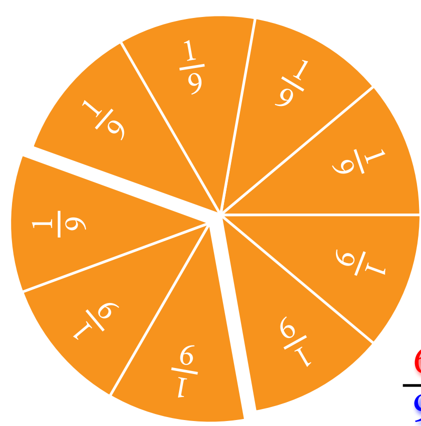
La regla de tres es equivalente a la proporción entre dos pares de rectas, en la cual solamente conocemos la longitud de tres rectas y queremos calcular la longitud de la cuarta recta.

Le llamamos regla de tres porque conocemos tres datos.

Recordemos que las fracciones equivalentes también son proporciones.



$\frac{12}{18}$



$\frac{6}{9}$

como

es a $\frac{12}{18} = \frac{6}{9}$ es a

La multiplicación y la división son operaciones inversas

Recordemos también que podemos conocer el valor desconocido en una proporción, utilizando la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas.

$$\frac{x}{7} = \frac{42}{14} \rightarrow x = \frac{42}{14} \times 7 \rightarrow x = \frac{42 \times 7}{14} \rightarrow x = \frac{42}{2} \rightarrow x = 21$$

$\times$

Ejemplo

Obtener el valor desconocido x, de la proporción.

$$\frac{x}{18} = \frac{6}{9} \rightarrow x = \frac{6}{9} \times 18 \rightarrow x = \frac{6 \times 18}{9} \rightarrow x = 12$$

$\times$

Para resolver problemas de regla de tres, seguimos este mismo procedimiento.

Ejemplo

Pintamos 120 metros cuadrados con 10 litros de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados podemos pintar, si solamente tenemos 5 litros de pintura?

Este problema nos sirve para entender y demostrar que la regla de tres, es una aplicación de las proporciones.

Datos del problema

120 m^2 *se pintan con* 10 litros.

x m^2 *se pintan con* 5 litros.

Porque este problema es muy sencillo, estudiando con detenimiento los datos, nos damos cuenta que si contamos con la mitad de la pintura, entonces podemos pintar la mitad del área.

Dibujo del problema

Cuando sea posible, es importarte hacer un dibujo del problema.

$$\frac{120\ \text{m}^2}{10\ \text{litros}} \qquad \frac{x\ \text{m}^2}{5\ \text{litros}}$$

Plantear el problema

Ahora vamos a plantearlo, utilizando proporciones. El lenguaje que usamos al plantearlo es muy importante.

Si pintamos 120 m^2 con 10 litros, ¿cuántos m^2 pintamos con 5 litros?

como

es a $\quad \dfrac{120\ \text{m}^2}{10\ \text{litros}} = \dfrac{x\ \text{m}^2}{5\ \text{litros}} \quad$ es a

Es muy importante ser consistente con las unidades. En el numerador y en el denominador de ambas fracciones debe haber las mismas unidades.

Solución

Para resolver las proporciones, es conveniente que la incógnita x, esté del lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{x}{5} = \frac{120}{10} \;\rightarrow\; x = \frac{120}{10} \times 5 \;\rightarrow\; x = \frac{120 \times 5}{10}$$

$$x = \frac{120}{2} \;\rightarrow\; x = 60\ \text{m}^2$$

Ahora resolvemos el problema, si tenemos 12 litros.

Datos del problema

120 m^2 *se pintan con* 10 litros.

x m^2 *se pintan con* 12 litros.

Plantear el problema

Si pintamos 120 m^2 con 10 litros, ¿cuántos m^2 pintamos con 5 litros?

como

es a $\quad \dfrac{120\ \text{m}^2}{10\ \text{litros}} = \dfrac{x\ \text{m}^2}{12\ \text{litros}} \quad$ es a

Solución

Para resolver las proporciones, es conveniente que la incógnita x, esté del lado izquierdo de la igualdad.

$$\frac{x}{12} = \frac{120}{10} \;\rightarrow\; x = \frac{120}{10} \times 12 \;\rightarrow\; x = \frac{120 \times 12}{10}$$

$$x = 12 \times 12 \;\rightarrow\; x = 144\ \text{m}^2$$

Ejemplo

En un día completo de trabajo, 6 carpinteros construyeron 22 metros de cerca. Al día siguiente, se presentan a trabajar 9 carpinteros. ¿Cuántos metros de cerca construirán, si trabajan el día completo?

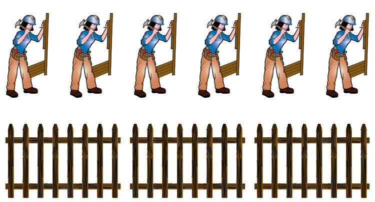
Datos del problema

6 carpinteros *construyen* 22 metros de cerca.

9 carpinteros *construyen* x metros de cerca.

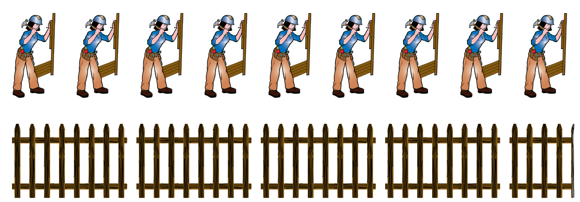
Dibujo del problema

Cuando sea posible, es importarte hacer un dibujo del problema.



22 m

$$\frac{\text{6 carpinteros}}{\text{22 metros}}$$



x m

$$\frac{\text{9 carpinteros}}{x \text{ metros}}$$

Plantear el problema

6 carpinteros construyen 22 metros, 9 carpinteros ¿cuántos metros construyen?

como

es a $\quad \dfrac{\text{6 carpinteros}}{\text{22 metros}} = \dfrac{\text{9 carpinteros}}{x \text{ metros}} \quad$ es a

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

Primero escribimos la igualdad colocando la fracción que tiene a la incógnita del lado izquierdo.

$$\frac{6}{22} = \frac{9}{x} \quad \longrightarrow \quad \frac{9}{x} = \frac{6}{22}$$

Recordemos que la proporción la podemos establecer tomando como referencia los carpinteros o los metros. Sin alterar la proporción podemos invertir los términos de ambas fracciones.

$$\frac{9}{x} = \frac{6}{22} \quad \longrightarrow \quad \frac{x}{9} = \frac{22}{6}$$

Aplicamos la propiedad de la división y multiplicación como operaciones inversas.

$$\frac{x}{9} = \frac{22}{6} \quad \longrightarrow \quad x = \frac{22}{6} \times 9 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{22 \times 9}{6}$$

$\times$

$$x = \frac{22 \times 3}{2} \quad \longrightarrow \quad x = 33 \text{ m}$$

Razón

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Viajando a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros recorremos en 15 minutos?

Concepto de razón

Una razón es una proporción especial, ya que el denominador es siempre 1. Una razón es fácil de usar porque uno de los denominadores es siempre 1.

Las razones las utilizamos con tanta frecuencia, que usamos la palabra por, para establecer la proporción. Utilizamos una nomenclatura especial, para abreviarlas.

Razones más comunes

Kilómetros por hora.

$$\frac{\text{Kilómetros}}{\text{Hora}} \rightarrow \frac{km}{hr} \rightarrow km\ /\ hr$$

Ciclos o revoluciones (vueltas) por hora, minuto o segundo.

$$\frac{\text{Ciclos}}{\text{Hora}} \rightarrow \frac{ciclos}{hr} \rightarrow ciclos\ /\ hr$$

$$\frac{\text{Revoluciones}}{\text{Minuto}} \rightarrow \frac{rev}{m} \rightarrow rev\ /\ m$$

$$\frac{\text{Ciclos}}{\text{Segundo}} \rightarrow \frac{ciclos}{seg} \rightarrow ciclos\ /\ seg$$

Kilómetros por litro.

$$\frac{\text{Kilómetros}}{\text{Litro}} \rightarrow \frac{km}{l} \rightarrow km\ /\ l$$

Usamos la regla de tres para resolver las razones.

Ejemplo

Un carro compacto recorre *18 kilómetros* por *litro de gasolina*. ¿Cuántos litros de gasolina se requieren para recorrer 144 kilómetros?

Datos del problema

18 kilómetros *por* 1 litro de gasolina.

144 kilómetros *por* x litros de gasolina.

Plantear el problema

6 carpinteros construyen 22 metros, 9 carpinteros ¿cuántos metros construyen?

$$\frac{\text{18 kilómetros}}{\text{1 litro}} = \frac{\text{144 kilómetros}}{x \text{ litros}}$$

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

$$\frac{18}{1} = \frac{144}{x} \rightarrow \frac{144}{x} = \frac{18}{1} \rightarrow \frac{x}{144} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{x}{144} = \frac{1}{18} \qquad x = \frac{1}{18} \times 144 \rightarrow x = \frac{1 \times 144}{18}$$

$$x = 8 \text{ litros}$$

Ejemplo

Viajando a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros recorremos en 15 minutos?

Datos del problema

80 kilómetros *en* 1 hora.

x kilómetros *en* 15 minutos.

Plantear el problema

Expresamos 1 hora en minutos.

1 hora es 60 minutos.

$$\frac{80 \text{ kilómetros}}{60 \text{ minutos}} = \frac{x \text{ kilómetros}}{15 \text{ minutos}}$$

Solución

Para que la aplicación de la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas, es conveniente que la incógnita x se encuentre del lado izquierdo y en el numerador.

$$\frac{80}{60} = \frac{x}{15} \longrightarrow \frac{x}{15} = \frac{80}{60}$$

$$\frac{x}{15} = \frac{80}{60} \longrightarrow x = \frac{80}{60} \times 15 \longrightarrow x = \frac{80 \times 15}{60}$$

$\times$

$$x = 20 \; km$$

Capítulo 10

Promedio

Raíz Cuadrada

Porcentaje

Interés

Promedio

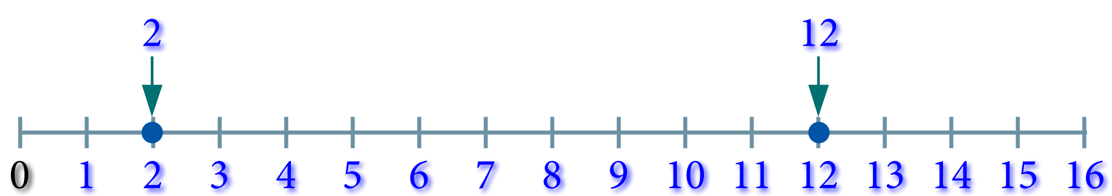
Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

Concepto de promedio

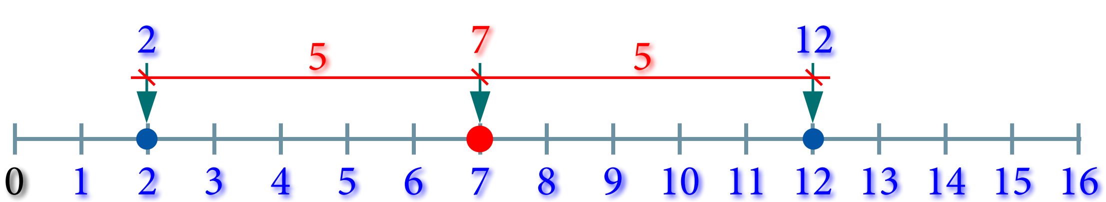
La palabra promedio sugiere el que está en medio. Es un término utilizado en matemáticas para indicar el número que se encuentra en medio o a la mitad de dos números.

El concepto de promedio podemos visualizarlo utilizando la recta de los números reales u objetos.

Concepto de promedio en la recta de los números



El promedio de 2 y 12 es el número que se encuentra en medio, es decir, a la mitad entre los dos.



El promedio de 2 y 12 es 7, ya que es el número que se encuentra a la mitad entre 2 y 12.

En lenguaje matemático se escribe como:

$$\text{Promedio}_{2\text{ y }12} = 7$$

Calculamos el promedio sumando los números y dividiendo la suma entre 2.

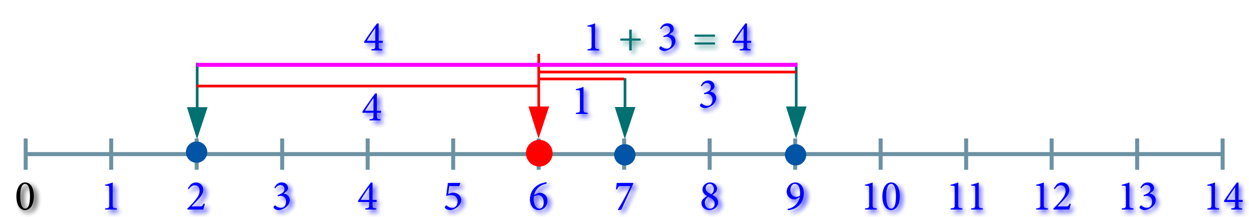
$$\text{Promedio}_{2\text{ y }12} = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Ahora tenemos tres números y queremos calcular el promedio. Los tres números contribuyen al promedio, por lo cual los sumamos y el resultado lo dividimos entre 3.

Ejemplo

Calcular el promedio de 2, 7 y 9. Demostrar usando la recta de los números reales, que el promedio es el número que se encuentra en medio.

$$\text{Promedio}_{2,\,7\text{ y }9} = \frac{2 + 7 + 9}{3} = \frac{18}{3} = 6$$



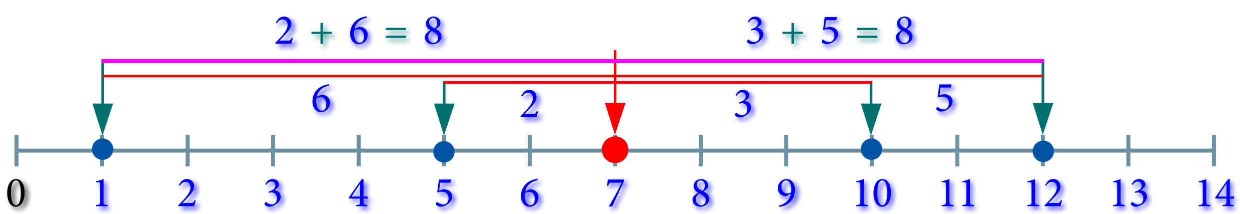
El 7 y el 9 se encuentran a la derecha del promedio, el número 6, y la suma de sus distancias, es igual a la distancia del número 2, que se encuentra a la izquierda, al 6 que es el promedio.

Para generalizar la fórmula, vamos ahora a sacar el promedio de cuatro números y demostrarlo con la recta de los números reales, que se encuentra en medio de los cuatro números.

Ejemplo

Calcular el promedio de 1, 5, 10 y 12. Demostrar usando la recta de los números reales, que el promedio es el número que se encuentra en medio.

$$\text{Promedio}_{1,\,5,\,10\text{ y }12} = \frac{1 + 5 + 10 + 12}{4} = \frac{28}{4} = 7$$



El 1 y el 5 se encuentran a la izquierda del promedio, los números 10 y 12 se encuentran a la derecha del promedio. La suma de las distancias de los números al promedio es la misma.

Podemos ahora crear una fórmula para calcular el promedio de cualquier cantidad de números.

Algoritmo para calcular el promedio

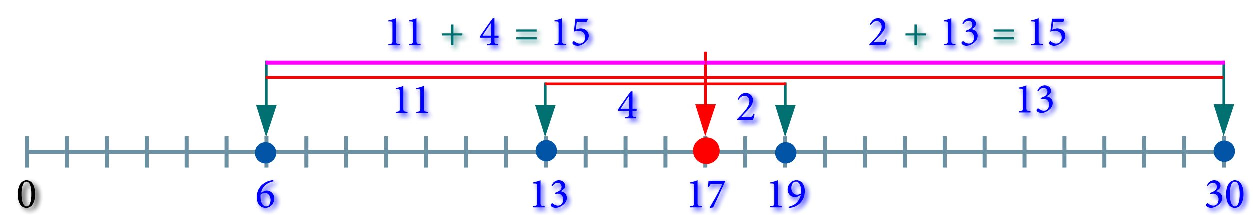
$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma de todos los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

Utilizando la fórmula, calcular el promedio de 6, 13, 19, 30.

$$\text{Promedio}_{6,\,13,\,19\text{ y }30} = \frac{6 + 13 + 19 + 30}{4} = \frac{68}{4} = 17$$

Calculando la suma de las distancias de los números que se encuentran a la izquierda y a la derecha del promedio, podemos demostrar que el resultado es correcto.



Raíz Cuadrada

Quinto y Sexto Niveles de Abstracción

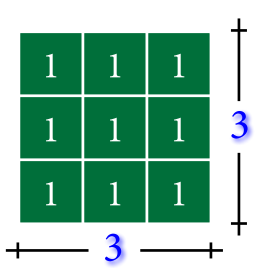
Concepto de raíz

La raíz es el origen o fuente de cosas o eventos. Decimos, el ocio es la raíz de todos los vicios. Es decir, el ocio es en donde se originan los vicios.

Concepto de raíz cuadrada

La raíz cuadrada es el origen de un cuadrado cuya área conocemos, es decir, la dimensión de sus lados.

Conocer un cuadrado significa que sabemos cuál es su área, o sea, la cantidad de superficie contenida en él. Saber cuál es el origen del cuadrado, implica conocer la dimensión de sus lados, es decir, de dónde procede esa área.



Área = Base × Altura.

Área = $3 \times 3 = 9\ u^2$.

Una área de un cuadrado compuesta de 9 unidades cuadradas, la dimensión de la base y la altura es 3.

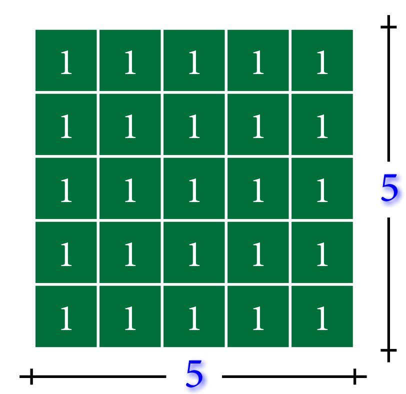
El origen del cuadrado es 3, por lo cual, la raíz cuadrada de 9 es 3.

Raíz cuadrada de 9 = 3.

Notación de raíz cuadrada

Para indicar la raíz cuadrada, utilizamos un símbolo parecido a la casita de la división.

$$\sqrt{9} = 3$$



Área = Base × Altura.

Área = $5 \times 5 = 25\ u^2$.

Una área de un cuadrado compuesta de 25 unidades cuadradas, la dimensión de la base y la altura es 5.

El origen del cuadrado es 5, por lo cual, la raíz cuadrada de 25 es 5.

Raíz cuadrada de 25 = 5.

$$\sqrt{25} = 5$$

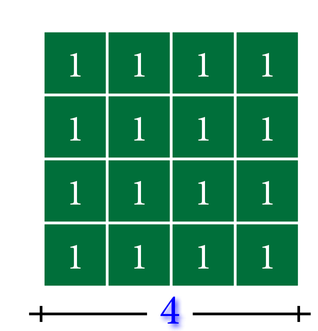
Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico

Para calcular la raíz cuadrada con material didáctico, utilizamos cuadritos. Conociendo el área, formamos un cuadrado. Si la raíz cuadrada no es exacta, entonces calculamos la raíz cuadrada aproximada.

Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 16.

El área del cuadrado está formada de 16 cuadritos, los cuales los acomodamos formando un cuadrado.



Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.

Por lo cual: $\sqrt{16} = 4$

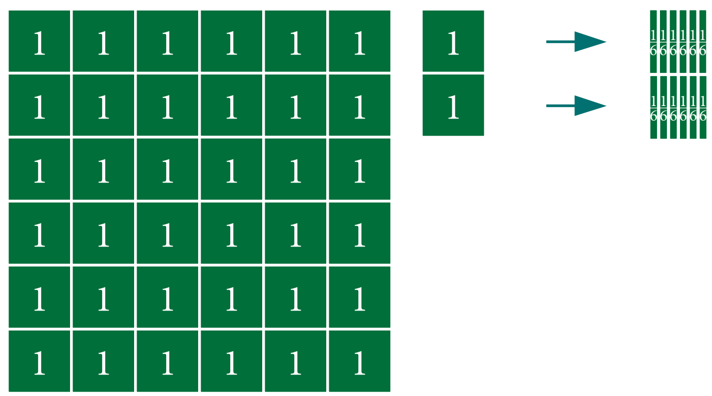
Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 38.

El área del cuadrado está formada de 38 cuadritos. Podemos acomodar formando un cuadrado 36 cuadritos y sobran 2.

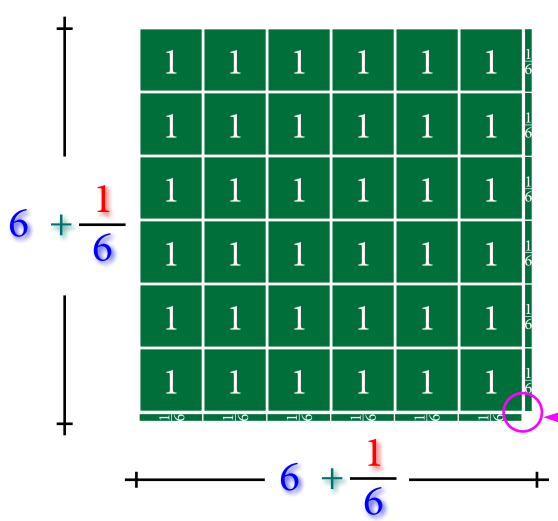
Los dos cuadritos que sobraron, debemos acomodarlos en la base y la altura del cuadrado.

Para hacerlo los dividimos en 6 fracciones cada uno.



Acomodamos las 12 fracciones en la base y la altura del cuadrado.

Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.



$$\sqrt{38} \approx 6 + \frac{1}{6}$$

$$\sqrt{38} \approx 6.16$$

Inexactitud.

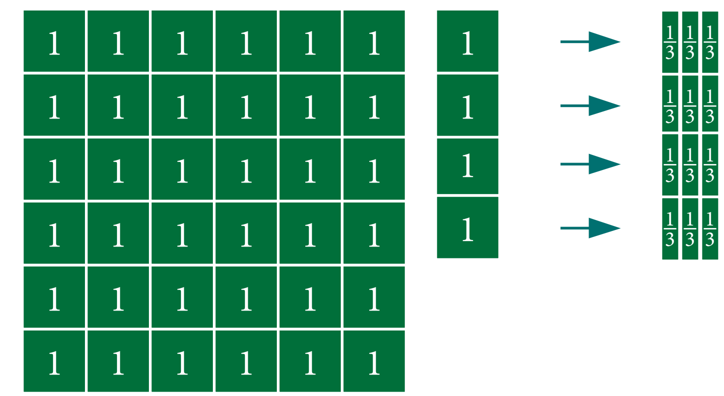
Ejemplo

Utilizando material didáctico calcular la raíz cuadrada de 40.

El área del cuadrado está formada de 40 cuadritos. Podemos acomodar formando un cuadrado 36 cuadritos y sobran 4.

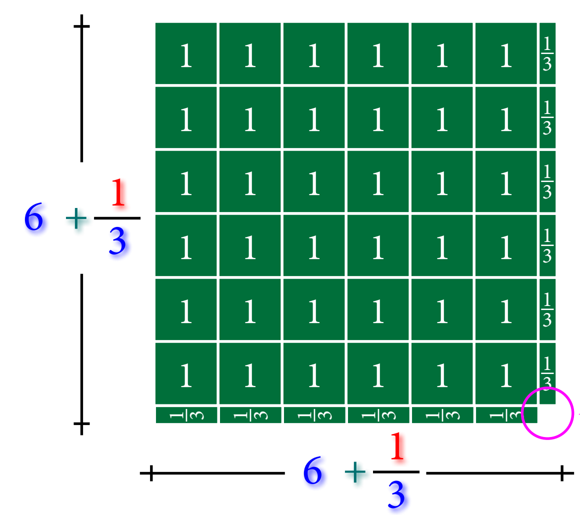
Los cuatro cuadritos que sobraron, debemos acomodarlos en la base y la altura del cuadrado.

Para hacerlo los dividimos en 3 fracciones cada uno.



Acomodamos las 12 fracciones en la base y la altura del cuadrado.

Medimos la dimensión de la base y la altura del cuadrado.



$$\sqrt{40} \approx 6 + \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{40} \approx 6.33$$

Inexactitud.

Estrategia para desarrollar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada

Para desarrollar un algoritmo que nos permita en forma ordenada y fácil calcular la raíz cuadrada de cualquier número, utilizamos tres conceptos básicos de aritmética.

Vamos brevemente a repasarlos.

Primer concepto

La división es la operación inversa de la multiplicación. Podemos comprobar que la división es correcta, si efectuamos una multiplicación.

$$\frac{28}{4} = 7 \quad \rightarrow \quad 28 = 7 \times 4$$

Segundo concepto

La raíz cuadrada es la longitud de los lados de un cuadrado cuya área conocemos.

La raíz cuadrada podemos también enunciarla como el número que al multiplicarlo por sí mismo nos da el número cuya raíz cuadrada queremos conocer.

$$5 \times 5 = 25 \quad \rightarrow \quad \sqrt{25} = 5$$

$$8 \times 8 = 64 \quad \rightarrow \quad \sqrt{64} = 8$$

Tercer concepto

El promedio es el número que se encuentra a la mitad de dos números. Se calcula sumando los números y dividiendo la suma entre 2.

$$\text{Promedio}_{2 \text{ y } 12} = \frac{2 + 12}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

Algoritmo para calcular la raíz cuadrada

Para crear un algoritmo que nos permita en forma sencilla obtener el valor de cualquier raíz cuadrada, utilizamos el hecho de que si al dividir un número entre otro número el resultado –*cociente*– es igual al divisor –*denominador*–, entonces, el divisor –*denominador*–, es la raíz cuadrada del dividendo –*numerador*–.

$$\frac{25}{5} = 5 \quad \rightarrow \quad 25 = 5 \times 5 \quad \rightarrow \quad \sqrt{25} = 5$$

Son iguales

$$\frac{64}{8} = 8 \quad \rightarrow \quad 64 = 8 \times 8 \quad \rightarrow \quad \sqrt{64} = 8$$

Son iguales

La estrategia que vamos a utilizar, consiste en ir aproximando el denominador y el resultado hasta hacerlos iguales.

El algoritmo requiere de tres pasos, por lo cual, lo llamamos en nuestra metodología, el algoritmo de los tres pasos calcular la raíz cuadrada.

Algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada

Los tres pasos que repetimos tantas veces como sea necesario son:

1. Determinar una raíz aproximada.
2. Dividir el número entre la raíz aproximada.
3. Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

Ejemplo

Calcular la raíz cuadrada de 30.

Primera iteración

Primer paso

Una raíz aproximada de 30 es 5, ya que 5×5 = 25.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{5} = 6$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{5 \text{ y } 6} = \frac{5 + 6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

Segunda iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 30 es 5.5.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{5.5} = 5.454$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{5.5 \text{ y } 5.454} = \frac{5.5 + 5.454}{2} = \frac{10.954}{2} = 5.477$$

Tercera iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 30 es 5.477.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{30}{\boxed{5.477}} = \boxed{5.477}$$

Son iguales

El denominador y el resultado de la división son iguales, por lo tanto, 5.477 es la raíz cuadrada de 30, ya que:

$$5.477 \times 5.477 = 30 \quad \rightarrow \quad \sqrt{30} = 5.477$$

Ejemplo

Calcular la raíz cuadrada de 42.

Primera iteración

Primer paso

Una raíz aproximada de 42 es 6, ya que 6×6 = 36.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{6} = 7$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{6 \text{ y } 7} = \frac{6 + 7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$$

Segunda iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 42 es 6.5.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{6.5} = 6.46$$

Tercer paso

Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{6.5 \text{ y } 6.46} = \frac{6.5 + 6.46}{2} = \frac{12.96}{2} = 6.48$$

Tercera iteración

Primer paso

La nueva raíz aproximada de 42 es 6.48.

Segundo paso

Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{42}{\boxed{6.48}} = \boxed{6.48}$$

Son iguales

El denominador y el resultado de la división son iguales, por lo tanto, 6.48 es la raíz cuadrada de 42, ya que:

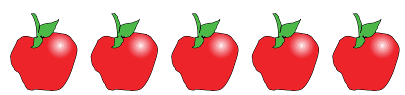
$$6.48 \times 6.48 = 42 \quad \rightarrow \quad \sqrt{42} = 6.48$$

Porcentaje

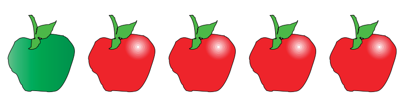
Sexto Nivel de Abstracción

Concepto de porcentaje

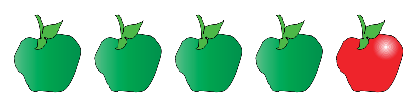
Los números fraccionarios se llaman racionales porque nos informan sobre la relación que el numerador guarda con el denominador.



Unidad



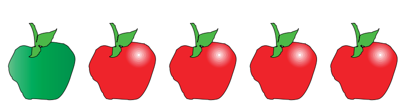
$\frac{1}{5}$ ← Una manzana de
← Cinco manzanas.



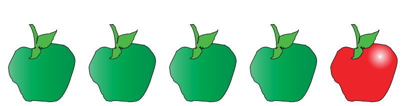
$\frac{4}{5}$ ← Cuatro manzanas de
← Cinco manzanas.

Si en lugar de decir una manzana de cinco manzanas, decimos una de cada cinco manzanas, generalizamos la fracción para cualquier número de manzanas y estamos utilizando el lenguaje de porcentaje.

Por ejemplo, podemos decir una de cada cinco manzanas es verde. No importa el número total de manzanas que tenemos, lo que nos interesa es saber la relación entre las manzanas verdes y las rojas.



$\frac{1}{5}$ ← Una de cada cinco manzanas es verde.



$\frac{4}{5}$ ← Cuatro de cada cinco manzanas es verde.

Para establecer el porcentaje, debemos expresar la fracción utilizando notación decimal.

$$\frac{1}{5} = 0.2 \qquad \frac{4}{5} = 0.8$$

Usando esta estrategia podemos relacionar el *numerador* con el *denominador* de la forma que necesitemos. Expresamos la fracción en notación decimal.

Cuatro de cada 9 personas son hombres.

$$\frac{\text{Hombres} \rightarrow 4}{\text{Personas} \rightarrow 9} = 0.4444$$

Tres de cada 10 trabajadores es extranjero.

$$\frac{\text{Extranjeros} \rightarrow 3}{\text{Trabajadores} \rightarrow 10} = 0.3$$

La palabra porcentaje viene del término por cien o por ciento.

Establecemos un porcentaje cuando suponemos que la unidad de la fracción es cien.

Notación de porcentaje

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, necesitamos utilizar la notación de porcentaje.

Dado que la palabra porcentaje viene del término por cien o por ciento, creamos un símbolo matemático que lo indique. El símbolo es:

% Se lee como: por ciento, por cien.

Ahora que conocemos la notación vamos a utilizarla resolviendo problemas.

Ejemplo

Sabemos que en el salón de clase hay 20 alumnos de los cuales 4 reprobaron el examen de matemáticas. Establecer esta relación utilizando notación de fracción, notación decimal y suponiendo que la población es de 100 alumnos.

Datos del problema

Unidad de la fracción: 20 alumnos.
Reprobados: 4 alumnos.

Notación de fracción y decimal

$$\begin{array}{r} \text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow \end{array} \frac{4}{20} = 0.2$$

Usando lenguaje de fracción decimos: 4 *de* 20 alumnos reprobaron. Usando lenguaje de porcentaje decimos: 4 *de cada* 20 alumnos reprobaron.

Si la población son cien alumnos

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, suponemos que el número de alumnos es 100.

Para hacer el denominador 100, debemos multiplicarlo por 5 y lo mismo hacemos con el numerador. Creamos una fracción equivalente.

$$\begin{array}{r} \text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow \end{array} \frac{4}{20} = \frac{4 \times 5}{20 \times 5} = \frac{20}{100} = 0.2$$

Es equivalente decir: 4 de cada 20 alumnos reprobaron o 20 de cada 100 alumnos reprobaron.

Utilizando el símbolo de porcentaje, en lugar de decir: *20 de cada 100* alumnos reprobaron, decimos: *20 por ciento* de alumnos reprobaron.

$$\begin{array}{r} \text{Reprobados} \rightarrow \\ \text{Alumnos} \rightarrow \end{array} \frac{4}{20} = \frac{4 \times 5}{20 \times 5} = \frac{20}{100} = 0.2 = 20\,\%$$

Usando la notación de porcentaje escribimos: 20 % y lo expresamos como: 20 por ciento de los alumnos reprobaron.

Cuando planteamos la fracción y la expresamos en notación decimal, podemos fácilmente convertirla a notación de porcentaje, multiplicando por 100 y usando el símbolo %.

$$0.2 = 0.2 \times 100\,\% = 20\,\%$$

Ejemplo

En la línea de producción de una fábrica hay 10 trabajadores de los cuales 3 son extranjeros. Establecer esta relación utilizando notación de fracción, notación decimal y suponiendo que la población es de 100 trabajadores.

Datos del problema

Unidad de la fracción: 10 trabajadores.
Extranjeros: 3 trabajadores.

Notación de fracción y decimal

$$\begin{array}{r} \text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow \end{array} \frac{3}{10} = 0.3$$

Usando lenguaje de fracción decimos: 3 *de* 10 trabajadores son extranjeros. Usando lenguaje de porcentaje decimos: 4 *de cada* 10 trabajadores son extranjeros.

Si la población son cien trabajadores

Para entender y demostrar el concepto de porcentaje, suponemos que el número de trabajadores es 100.

Para hacer el denominador 100, debemos multiplicarlo por 10 y lo mismo hacemos con el numerador. Creamos una fracción equivalente.

$$\begin{array}{r} \text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow \end{array} \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100} = 0.3$$

Es equivalente decir: 3 de cada 10 trabajadores son extranjeros o 30 de cada 100 trabajadores son extranjeros.

Utilizando el símbolo de porcentaje, en lugar de decir: *30 de cada 100* trabajadores son extranjeros, decimos: *30 por ciento* de trabajadores son extranjeros.

$$\begin{array}{r} \text{Extranjeros} \rightarrow \\ \text{Trabajadores} \rightarrow \end{array} \frac{3}{10} = \frac{3 \times 10}{10 \times 10} = \frac{30}{100} = 0.3 = 30\,\%$$

Usando la notación de porcentaje escribimos: 30 % y lo expresamos como: 30 por ciento de los trabajadores son extranjeros.

Cuando planteamos la fracción y la expresamos en notación decimal, podemos fácilmente convertirla a notación de porcentaje, multiplicando por 100 y usando el símbolo %.

$$0.3 = 0.3 \times 100\,\% = 30\,\%$$

Notación de fracción, notación decimal y porcentaje

Debido a que la notación de porcentaje es solamente una forma de expresar una fracción cuando la unidad de la fracción es 100, no podemos utilizarla para hacer operaciones.

Hacemos operaciones solamente cuando utilizamos notación de fracción o notación decimal.

Debemos desarrollar la habilidad para convertir de notación de fracción a notación decimal, y de notación decimal a notación de porcentaje y viceversa.

Conversión de notación decimal a porcentaje y viceversa

Incluir el símbolo %, implica multiplicar por 100, ya que es lo que significa. Ahora bien, si lo queremos eliminar debemos hacer la operación inversa.

Para convertir de notación decimal a porcentaje, multiplicamos por 100 y agregamos el símbolo %.

Para convertir de porcentaje a notación decimal, dividimos entre 100 y eliminamos el símbolo %.

Ejemplo

Convertir $\frac{7}{12}$ a notación de porcentaje.

Primero debemos convertir la fracción a notación decimal. Lo hacemos usando el algoritmo de la división.

$$\begin{array}{r|l} & 0.5833 \\ \hline 12 & 7.0 \\ & 100 \\ & 0040 \\ & \quad 040 \\ & \quad\ 04 \end{array} \longrightarrow \frac{7}{12} = 0.5833$$

Ahora convertimos de notación decimal a notación de porcentaje.

$$0.5833 = 0.5833 \times 100\ \% = 58.33\ \%$$

Ejemplo

Convertir 36.25% a notación decimal.

Para hacer la conversión a notación decimal, debemos dividir 36.25 entre 100 y eliminar el símbolo %.

$$36.25\ \% = \frac{36.25}{100} = 0.3625 \longrightarrow 36.25\ \% = 0.3625$$

Conversión de notación decimal a notación de fracción

La notación decimal, en la mayoría de los casos, es una forma inexacta de expresar una fracción, por lo que convertir de notación decimal a notación de fracción, no siempre resulta fácil, e incluso, en algunas ocasiones no es posible obtener una única respuesta.

No es de gran utilidad convertir de notación decimal a notación de fracción, sin embargo, en algunas ocasiones nos ayuda a entender mejor un problema.

La estrategia para efectuar la conversión es multiplicar y dividir el número decimal por la misma cantidad. Lo más sencillo es utilizar múltiplos de 10.

Ejemplo

Convertir 0.25 a notación de fracción.

Multiplicamos y dividimos 0.25 por 100 y simplificamos.

$$0.25 = \frac{0.25 \times 100}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \longrightarrow 0.25 = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

Convertir 0.125 a notación de fracción.

Multiplicamos y dividimos 0.125 por 1,000 y simplificamos.

$$0.125 = \frac{0.125 \times 1{,}000}{1{,}000} = \frac{125}{1{,}000} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8} \longrightarrow 0.125 = \frac{1}{8}$$

Interés

Sexto y Séptimo Niveles de Abstracción

Definición de interés

En una transacción bancaria, se le llama interés a la cantidad de dinero que el banco cobra por un préstamo, o paga por una cantidad de dinero invertido.

El interés se representa con la letra I.

Capital

Se le llama capital a la cantidad de dinero invertido o al total del préstamo recibido.

El capital se representa con la letra C.

Porcentaje

Se le llama porcentaje en una transacción bancario, a la cantidad de dinero recibido o pagado por cada $100.00.

El porcentaje se representa con la letra P.

Para deducir la fórmula que utilizaremos para calcular el interés, vamos hacer un ejemplo.

Ejemplo

Un banco paga 20% de interés por el capital invertido durante un año. Si invertimos $100.00 durante un año, ¿Cuánto dinero ganamos de interés?

Datos del problema

Capital invertido es $100.00.
Porcentaje que paga el banco es 20%.

Solución

De la definición de porcentaje sabemos que 20% significa que tomamos 20 de 100. Por lo cual, por cada $100.00 invertidos, ganamos $20.00.

Vamos analizar lo que esto significa.

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$20\ \% = \frac{20}{100} = 0.2 \qquad \longrightarrow \qquad 20\ \% = 0.2$$

Los $20.00 de interés los obtenemos, si multiplicamos el capital: $100.00 por el porcentaje: 0.2.

$$\begin{aligned} C &= 100 \\ P &= 0.2 \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{aligned} I &= 100 \times 0.2 = \$20 \\ I &= C \times P \end{aligned}$$

Ahora podemos escribir una fórmula que podemos utilizar para calcular el interés de cualquier cantidad.

$$I = C \times P$$

Ejemplo

Un banco paga 12.5% de interés por el capital invertido durante un año. Si invertimos $2,560.00 durante un año, ¿Cuánto dinero ganamos de interés?

Datos del problema

Capital invertido es $2,560.00.
Porcentaje que paga el banco es 12.5%.
¿Cuál es el interés ganado?

$$C = \$2{,}560 \qquad I = x$$
$$P = 12.5\ \%$$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 12.5\ \% = \frac{12.5}{100} = 0.125 \quad \longrightarrow \quad P = 12.5\ \% = 0.125$$

Escribimos la fórmula para calcular el interés.

$$I = C \times P$$

Substituimos las letras por su valor.

$$I = 2{,}560 \times 0.125$$
$$I = \$320.00$$

La fórmula que hemos deducido, nos sirve para calcular el interés, sin embargo también podemos usarla para calcular el capital o el porcentaje.

Para deducir estas fórmulas, aplicamos la propiedad de la multiplicación y la división como operaciones inversas.

$$\frac{15}{3} = 5 \quad \longrightarrow \quad 15 = 5 \times 3 \quad \longrightarrow \quad \frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{I}{P} = C \quad \longrightarrow \quad I = C \times P \quad \longrightarrow \quad \frac{I}{C} = P$$

Formula del interés $\quad I = C \times P$

Formula del capital $\quad C = \dfrac{I}{P}$

Formula del porcentaje $\quad P = \dfrac{I}{C}$

Ejemplo

Solicitamos un préstamo de $25,000 al banco y nos cobran $3,750 de interés. ¿A qué porcentaje nos prestaron el dinero?

Datos del problema

Capital prestado es $25,000.00.
Interés que el banco cobra es $3,750.00.
¿Cuál es el porcentaje?

$$C = \$25{,}000 \qquad P = x$$
$$I = \$3{,}750$$

Solución

Escribimos la fórmula para calcular el porcentaje.

$$P = \frac{I}{C}$$

Substituimos las letras por su valor.

$$P = \frac{3{,}750}{25{,}000} = 0.15$$

Convertimos el porcentaje de notación decimal a notación de porcentaje.

$$P = 0.15 = 0.15 \times 100\ \% = 15\ \%$$
$$P = 15\ \%$$

Ejemplo

Si el banco paga 8.75% de interés anual en una cuenta de ahorros. ¿Cuánto dinero necesitamos depositar, si al final del año queremos ganar $3,820 en intereses?

Datos del problema

Porcentaje es 8.75%.
Interés ganado es $3,820.00.
¿Cuál es el capital?

$$P = 8.75\ \% \qquad C = x$$
$$I = \$3{,}820$$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 8.75\ \% = \frac{8.75}{100} = 0.0875 \quad \longrightarrow \quad P = 8.75\ \% = 0.0875$$

Escribimos la fórmula para calcular el capital.

$$C = \frac{I}{P}$$

Substituimos las letras por su valor.

$$C = \frac{\$3{,}820}{0.0875} = \$43{,}657$$

$$C = \$43{,}657$$

Interés compuesto

El interés compuesto es la cantidad de dinero que pagamos o recibimos sobre un determinado periodo de tiempo, tomando en cuenta que el capital se va incrementando debido a los intereses acumulados.

Para calcular el interés compuesto de cada periodo, sumamos el interés ganado en ese periodo al capital, y calculamos el nuevo interés usando el capital del periodo anterior.

Para calcular el interés compuesto es muy útil hacer una tabla.

Ejemplo

Invertimos $1,000 en un banco que paga 10% de interés mensual compuesto. ¿Cuánto dinero tendremos después de 6 meses?

Datos del problema

Capital invertido es $1,000.00.
Porcentaje que paga el banco es 10% de interés mensual.
Tiempo transcurrido es 6 meses.
¿Total de capital a los 6 meses?

$$C_{Inicial} = \$1{,}000.00$$

$$P = 10\ \%\ \text{Mensual}$$

$$T = 6\ \text{meses}$$

$$C_{Final} = x$$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 10\ \% = \frac{10}{100} = 0.1 \quad \rightarrow \quad P = 10\ \% = 0.1$$

Hacemos una tabla para calcular el interés que cada mes se acumula al capital.

T	$\text{Capital}_{\text{Inicial}}$	P	Interés $I = C_{Inicial} \times P$	$\text{Capital}_{\text{Final}}$ $C_{Final} = C_{Inicial} + I$
	$1,000.00	0.1	1,000.00 × 0.1 = 100.00	1,000.00 + 100.00 = $1,100.00
1	$1,100.00	0.1	1,100.00 × 0.1 = 110.00	1,100.00 + 110.00 = $1,210.00
2	$1,210.00	0.1	1,210.00 × 0.1 = 121.00	1,210.00 + 121.00 = $1,331.00
3	$1,331.00	0.1	1,331.00 × 0.1 = 133.10	1,331.00 + 133.10 = $1,464.10
4	$1,464.10	0.1	1,464.00 × 0.1 = 146.41	1,464.10 + 146.41 = $1,610.51
5	$1,610.51	0.1	1,610.51 × 0.1 = 161.05	1,610.51 + 161.05 = $1,771.56
6	$1,771.56			

Fórmula para calcular el interés compuesto

Utilizando el ejemplo anterior, vamos a crear una fórmula para calcular el interés compuesto, sin necesidad de calcular mes a mes el interés y el nuevo capital.

Primer mes

Primero calculamos el interés generado en un periodo.

$$I = C_{Inicial} \times P$$

Después sumamos el interés al capital inicial.

$$C_{Final} = C_{Inicial} + I$$

$$C_{Final} = \underbrace{1{,}000.00}_{C_{Inicial}} + \underbrace{\underbrace{0.1}_{P} \times \underbrace{1{,}000.00}_{C_{Inicial}}}_{I}$$

Factorizamos $1,000.00 de la fórmula.

$$C_{Final} = 1{,}000.00(1 + 0.1)$$

Sumamos la cantidad que está dentro del paréntesis y obtenemos el capital final del primer periodo.

$$C_{Final} = 1{,}000.00 \times 1.1$$

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el primer mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{\text{Inicial}}$ por 1.1.

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el segundo mes, haremos lo mismo.

Segundo mes

Al iniciar el segundo mes, el C_{Inicial} es: $C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00 \times 1.1$

Siguiendo el mismo procedimiento, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1$

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el segundo mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{\text{Inicial}}$ por 1.1.

Tercer mes

Al iniciar el tercer mes, el C_{Inicial} es: $C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1$

Siguiendo el mismo procedimiento, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1$

Para calcular el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ al terminar el tercer mes, multiplicamos el $\text{Capital}_{\text{Inicial}}$ por 1.1.

Siguiendo el mismo procedimiento, calculamos el $\text{Capital}_{\text{Final}}$ para el cuarto, quinto y sexto mes.

Primer mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1$

Segundo mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\ (1.1)^2$

Tercer mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\ (1.1)^3$

Cuarto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\ (1.1)^4$

Quinto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\ (1.1)^5$

Sexto mes $C_{\text{Final}} = 1{,}000.00 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 \times 1.1 = 1{,}000.00\ (1.1)^6$

Para crear la fórmula, definimos una nueva letra para representar los meses. Utilizamos la letra n.

Calculamos el C_{Final}, multiplicamos el C_{Inicial} por 1.1. Sabemos que 1.1 es $(1 + 0.1)$.

$C_{\text{Final}} = 1{,}000.00(1 + 0.1)$ $\qquad C_{\text{Inicial}} = 1{,}000.00$ y $P = 0.1$.

$C_{\text{Final}} = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^1$

Al término del primer mes: $n = 1$. $\quad C_1 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^1$

Al término del segundo mes: $n = 2$. $\quad C_2 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^2$

Al término del tercer mes: $n = 3$. $\quad C_3 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^3$

Al término del cuarto mes: $n = 4$. $\quad C_4 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^4$

Al término del quinto mes: $n = 5$. $\quad C_5 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^5$

Al término del sexto mes: $n = 6$. $\quad C_6 = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^6$

Fórmula para calcular el interés compuesto

$$C_n = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^n$$

Ejemplo

Invertimos \$2,000.00 en un banco que paga 8% de interés mensual compuesto. ¿Cuánto dinero tendremos después de 3 meses?

Datos del problema

Capital invertido es \$2,000.00.
Porcentaje que paga el banco es 8% de interés mensual.
Tiempo transcurrido es 3 meses.
¿Total de capital a los 3 meses?

$C_{\text{Inicial}} = \$2{,}000.00 \qquad n = 3$ meses

$P = 8\ \%$ Mensual $\qquad C_{\text{Final}} = x$

Solución

No podemos hacer operaciones en notación de porcentaje, por lo cual debemos convertirlo a notación decimal.

$$P = 8\ \% = \frac{8}{100} = 0.08 \longrightarrow P = 8\ \% = 0.08$$

$$C_n = C_{\text{Inicial}}\ (1 + P)^n$$

$$C_3 = \$2{,}000.00\ (1 + 0.08)^3$$

$$C_3 = \$2{,}000.00\ (1.08)^3$$

$$C_3 = \$2{,}519.42$$

Capítulo 11

Figuras Geométricas
Raíz Cuadrada
Porcentaje
Interés

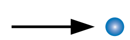
Figuras Geométricas

Primer Nivel de Abstracción

Las figuras geométricas

El punto

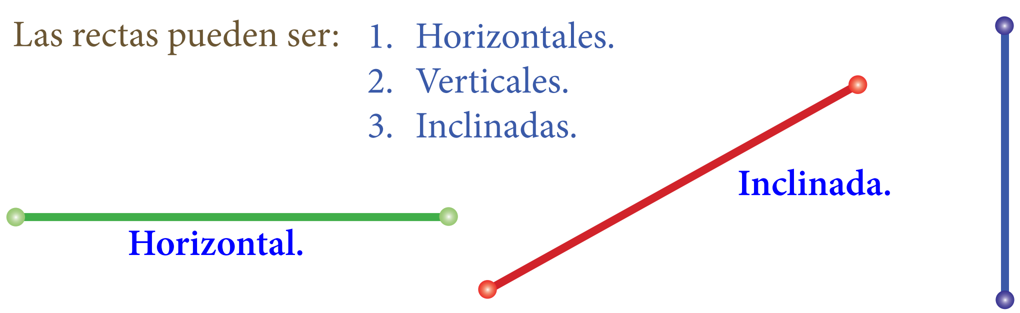
Uniendo puntos formamos figuras geométricas.

Punto. 

La recta

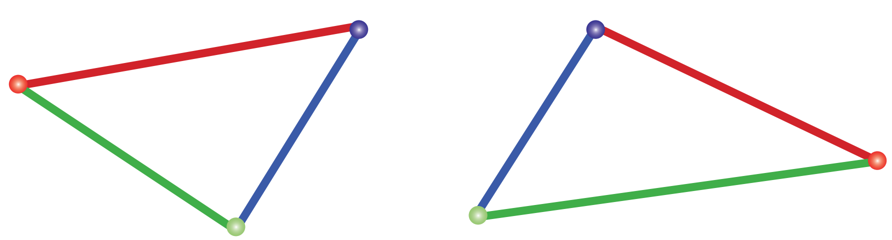
Uniendo dos puntos, trazamos una recta.

Las rectas pueden ser:
1. Horizontales.
2. Verticales.
3. Inclinadas.



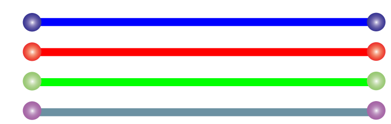
El triángulo

Uniendo tres puntos, trazamos un triángulo.

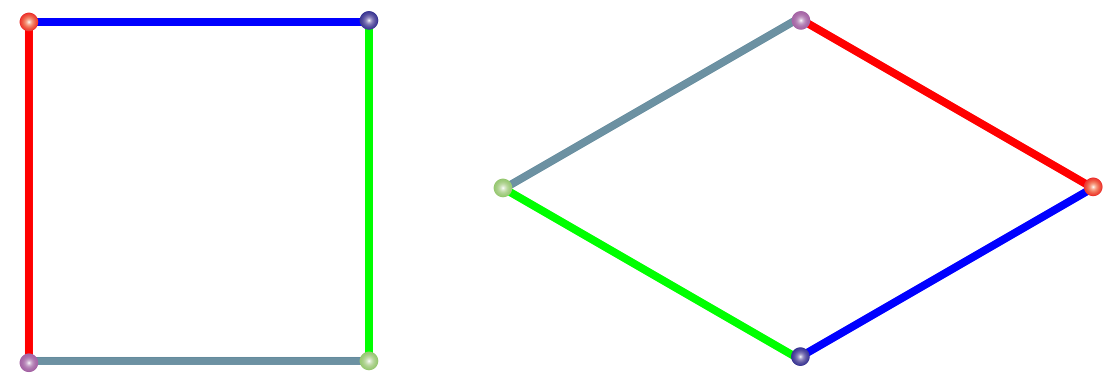


El cuadrado y el rombo

Uniendo cuatro rectas del mismo tamaño, formamos dos figuras geométricas:



Cuatro Rectas.



Cuadrado. **Rombo.**

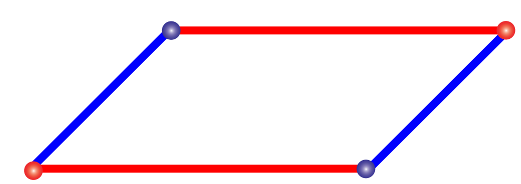
El rectángulo y el paralelogramo

Uniendo dos pares de rectas de diferente tamaño, formamos dos figuras geométricas:

Par de rectas iguales.

Par de rectas iguales.

Rectángulo.

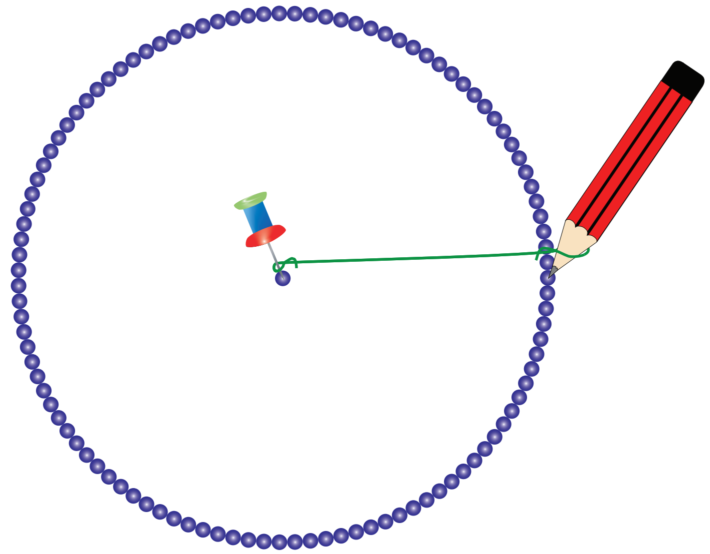


Paralelogramo.

El círculo

El círculo es una figura geométrica que no tiene rectas. Lo construimos utilizando un punto que se encuentra en el centro.

Dibujamos una sucesión de puntos que están a la misma distancia del centro. Podemos utilizar un hilo o un compás para hacerlo.



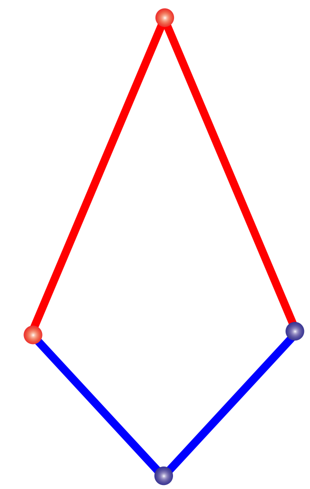
Segundo Nivel de Abstracción

El papalote

Uniendo dos pares de rectas de diferente tamaño, formamos un papalote. La diferencia con el rectángulo y el paralelogramo, consiste en el acomodo de los pares de rectas.

Par de rectas iguales.

Par de rectas iguales.

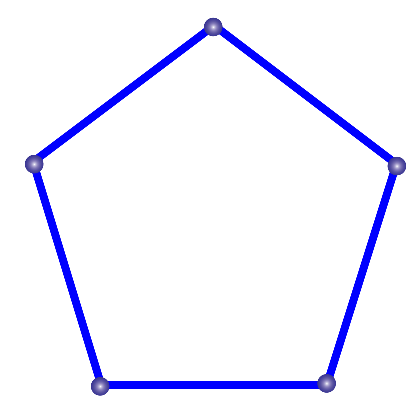


Papalote.

El pentágono

Uniendo cinco rectas del mismo tamaño, formamos un pentágono.

Cinco rectas



Pentágono.

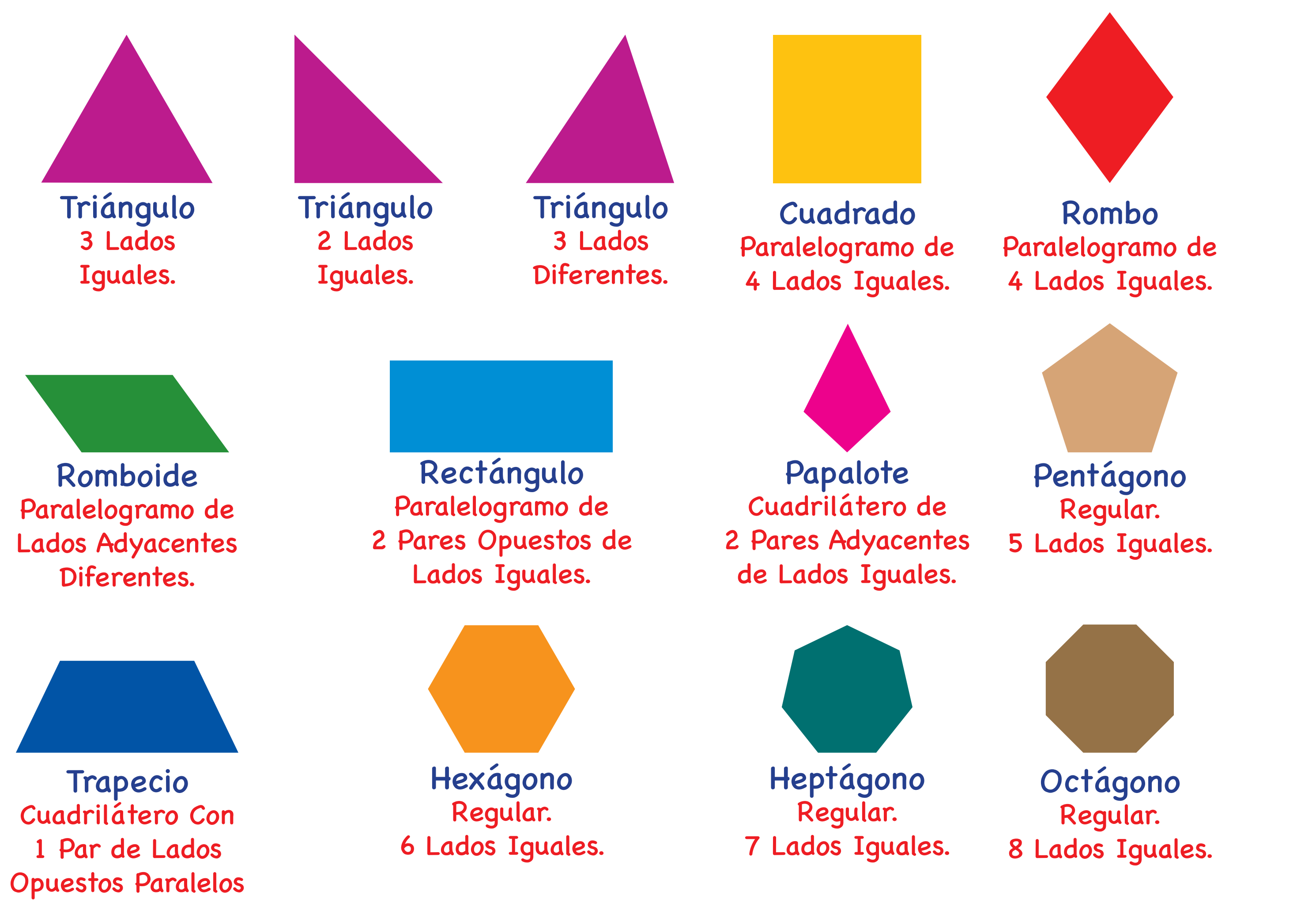
Tercer Nivel de Abstracción

Polígonos

Definición y clasificación

Todas las figuras geométricas planas cuyos lados son rectos, se les llama polígonos.

Los polígonos los podemos clasificar de acuerdo a su forma y al número de sus lados.



Unidades de Medición: Tiempo

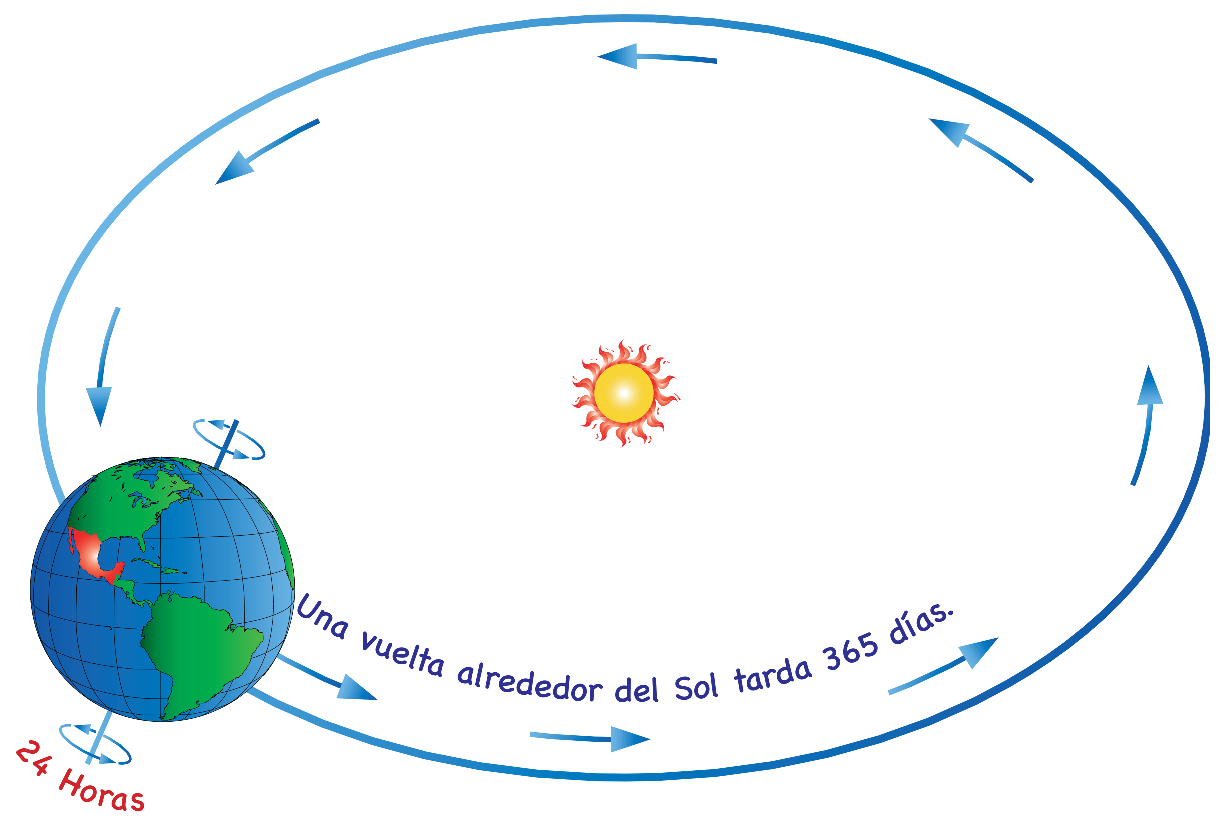
Primer Nivel

El tiempo

La tierra

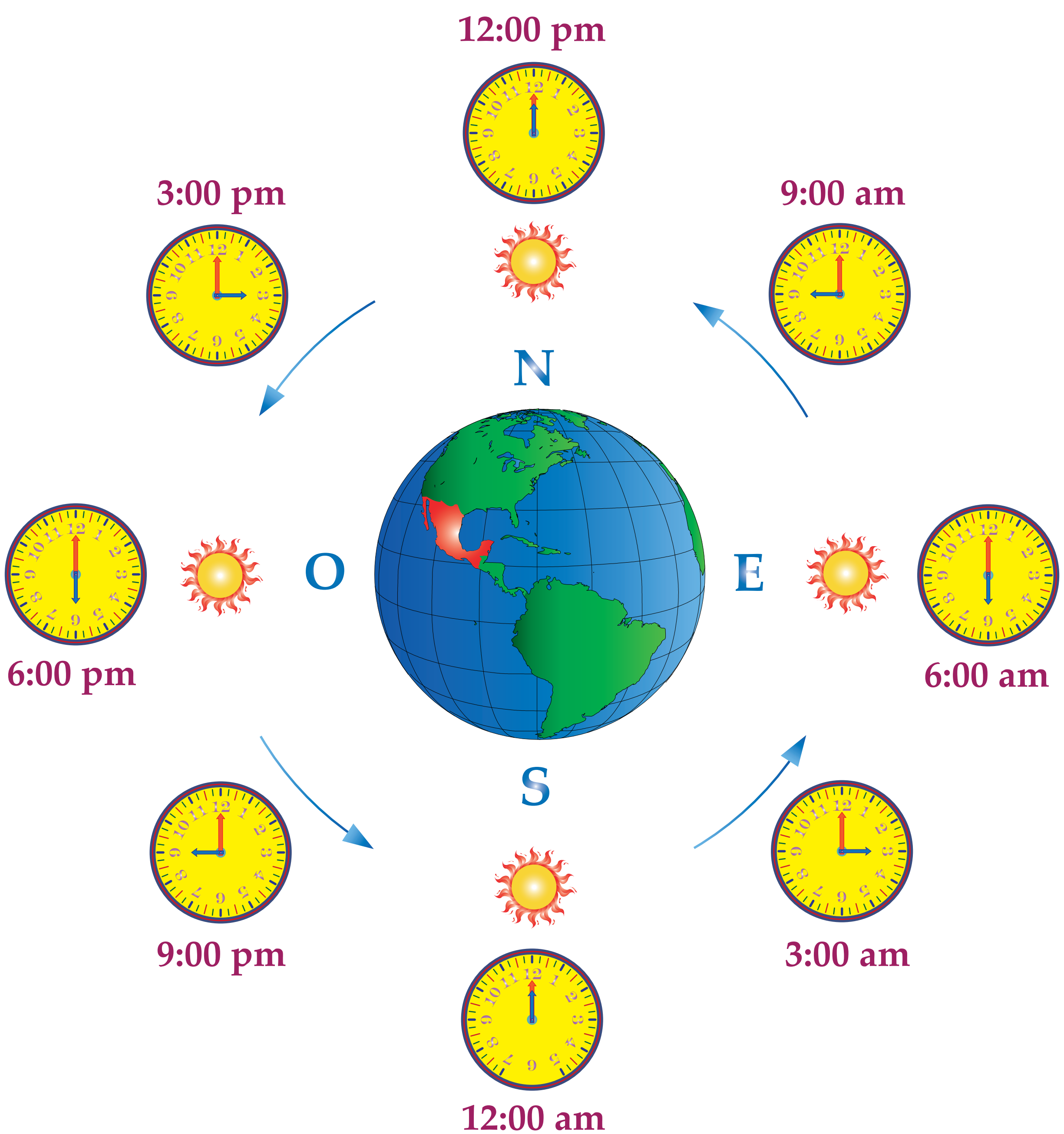
Observamos en el sistema planetario que la tierra gira alrededor del sol. Tarde aproximadamente 365 días en dar una vuelta completa.

La tierra también gira alrededor de su propio eje, como podemos observar en el dibujo. Tarda 24 horas en dar una vuelta completa.



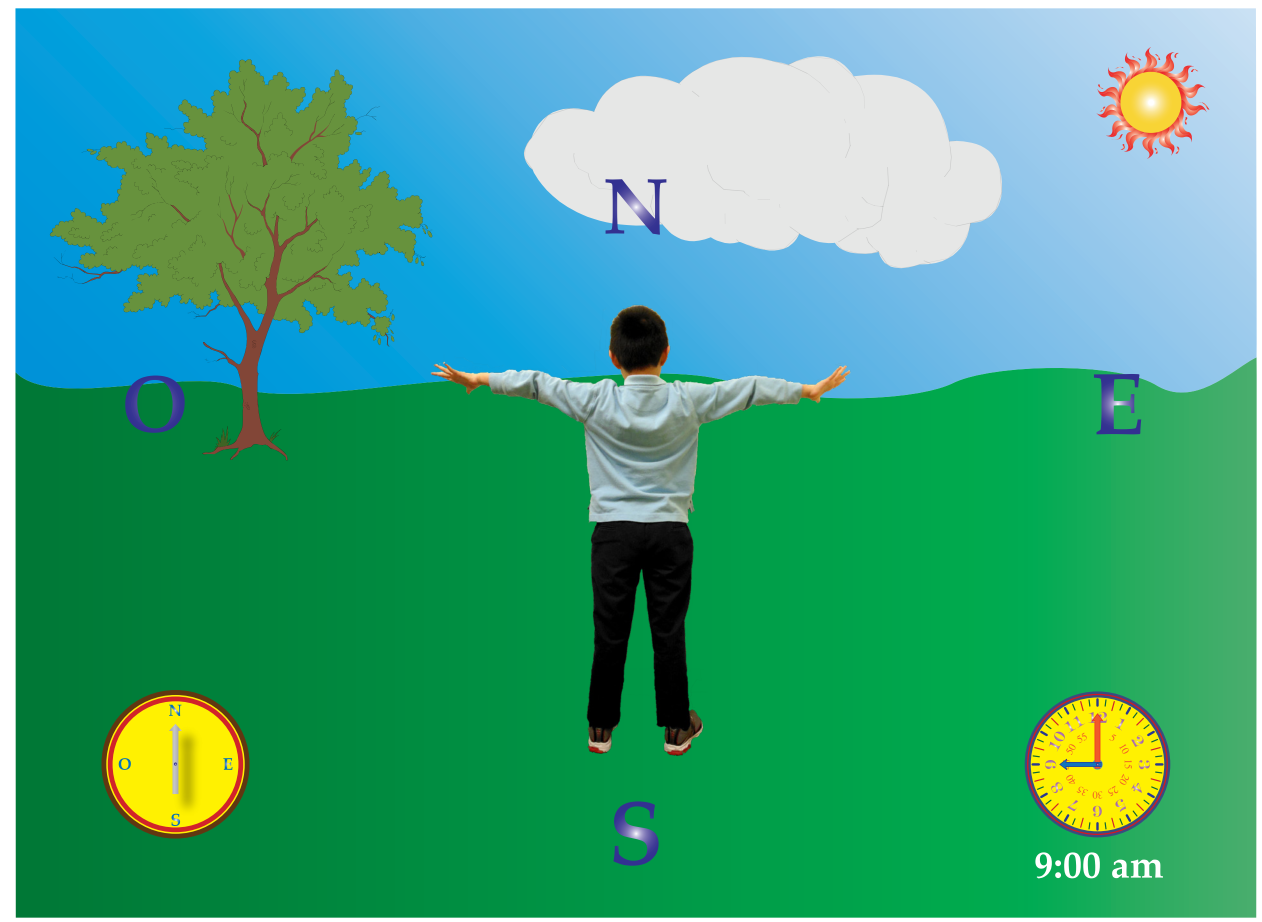
Al girar la tierra alrededor de su eje, nosotros observamos que el sol va girando alrededor de la tierra.

Siguiendo el movimiento del sol alrededor de la tierra, medimos el tiempo utilizando el reloj.



Nosotros vemos salir el sol en la mañana por el *Este*.
Al medio día el sol está encima de nosotros.
En la tarde vemos que el sol se oculta por el *Oeste*.

Si en la mañana nos paramos con los brazos abiertos y colocamos el brazo derecho señalando hacia el sol, es decir hacia el *Este*, entonces enfrente de nosotros está el *Norte*, detrás el *Sur* y el brazo izquierdo señala hacia el *Oeste*.



El calendario

Para medir los días, las semanas y los años, utilizamos el calendario.

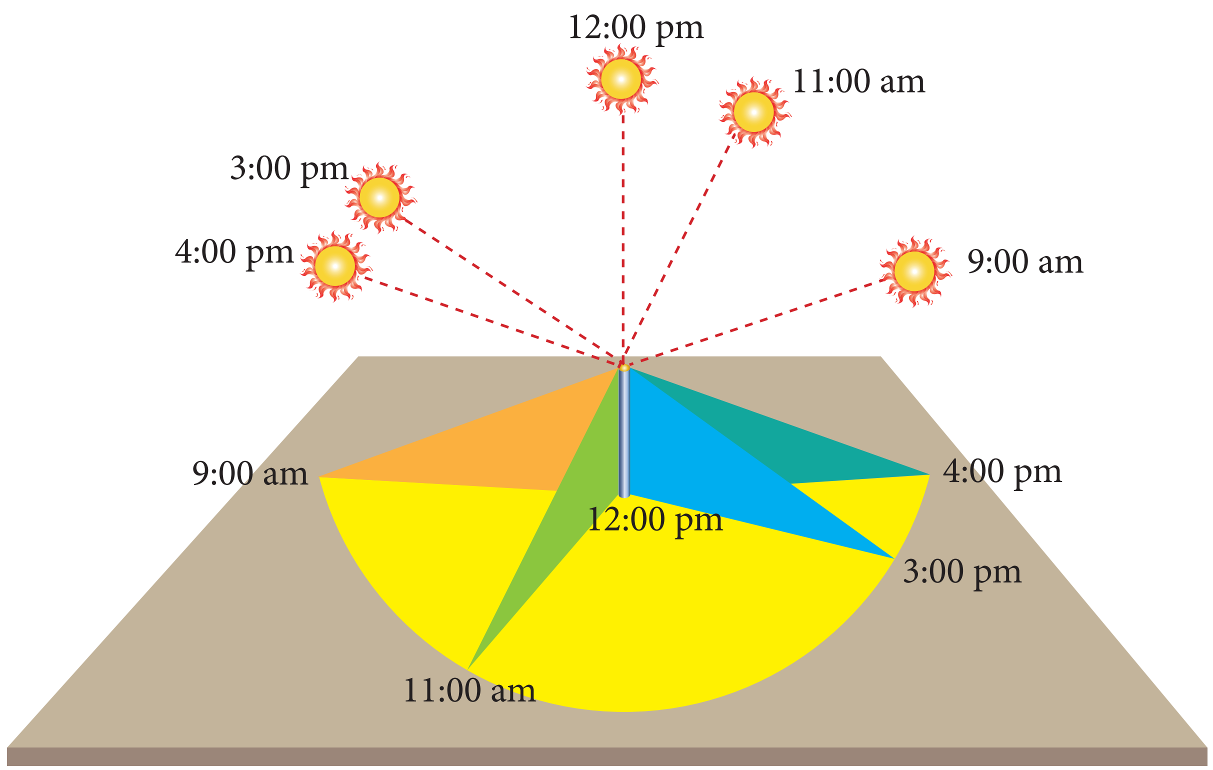
Una semana tiene 7 días.
Un mes puede tener 28, 29, 30 o 31 días.
Un año tiene 12 meses.

Medir el tiempo

El tiempo no lo podemos ver o tocar, lo percibimos cuando observamos el sol girando alrededor de la tierra.

Reloj de sol

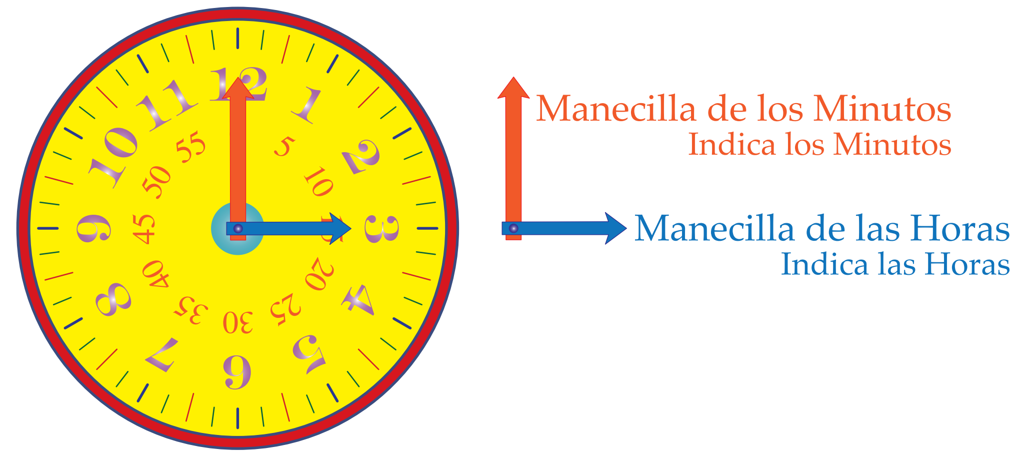
Nuestros antepasados utilizaron el movimiento del sol para calcular la hora del día. Una forma muy antigua de hacerlo es utilizar un poste colocado en el suelo o en la pared y marcar la posición de la sombra. A este invento le llamamos reloj de sol.



El reloj

Utilizando también un círculo, hace ya varios siglos, utilizando su ingenio e imaginación, diseñaron un reloj que imita el movimiento del sol alrededor de la tierra.

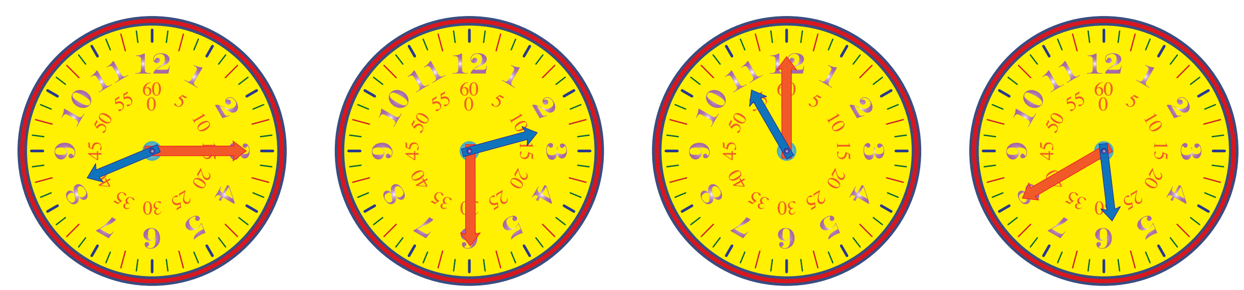
El reloj consiste de una caratula con los números de 1 al 12 distribuidos uniformemente. Para indicar la hora tiene dos manecilla.



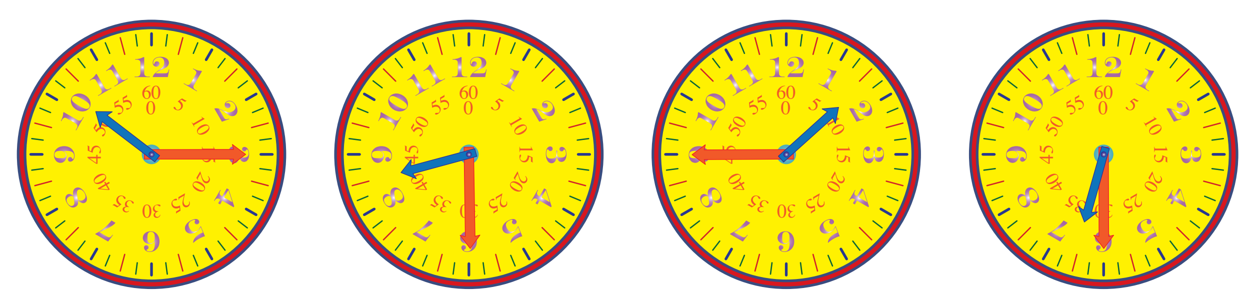
Un día tiene 24 horas, una hora tiene 60 minutos y un minuto tiene 60 segundos.

Un día tiene 24 horas, sin embargo el reloj solamente tiene 12 horas.

Para indicar si la hora es en la mañana, de las 12:00 de la noche a las 12:00 del día, utilizamos las letras am. Para indicar si es de las 12:00 del día a las 12:00 de la noche, utilizamos las letras pm.



8:15 am 2:30 pm 11:00 pm 5:40 am

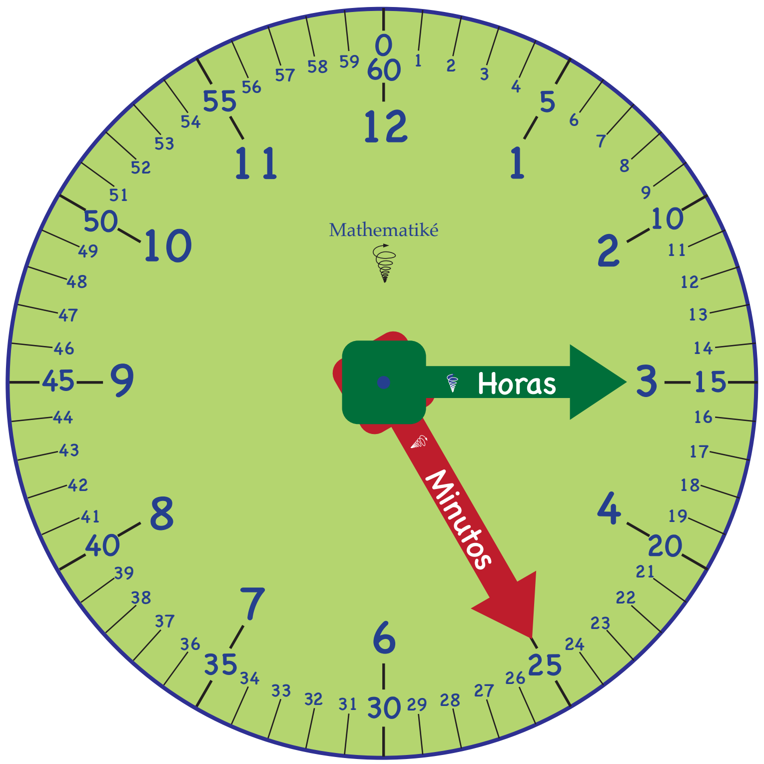


10:15 pm 8:30 am 1:45 pm 5:30 pm

Segundo Nivel

Unidades para medir el tiempo

Un *día* tiene 24 *horas*.
Una *hora* tiene 60 *minutos*.
Un *minuto* tiene 60 *segundos*.



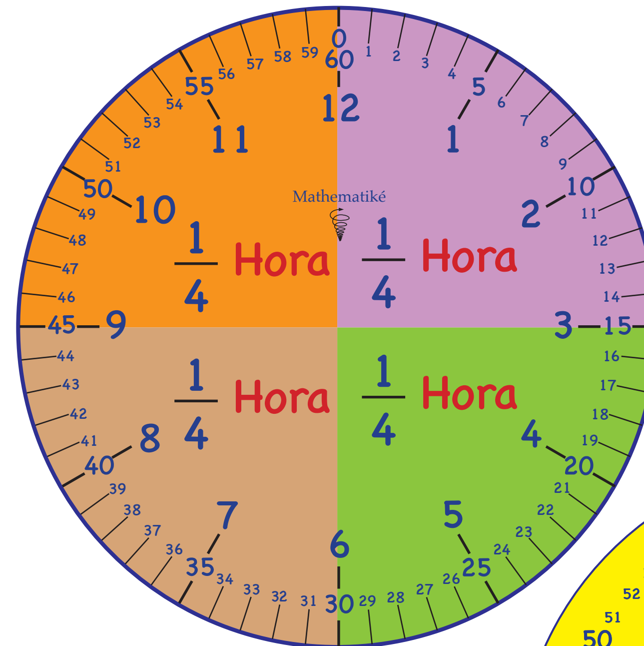
La manecilla chica del reloj nos sirve para señalar la hora y la manecilla grande los minutos.

El reloj nos permite medir 12 horas, por eso en un día completo la manecilla chica da dos vueltas.

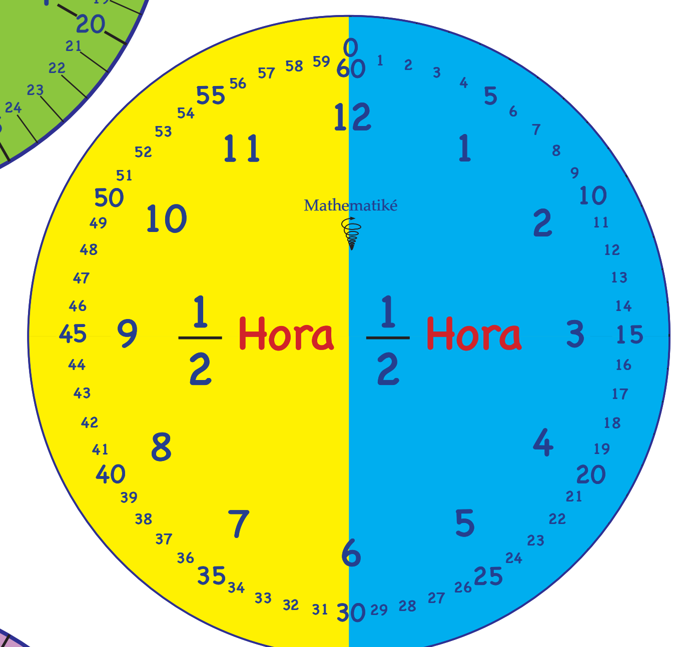
La manecilla grande da una vuelta completa cada hora.

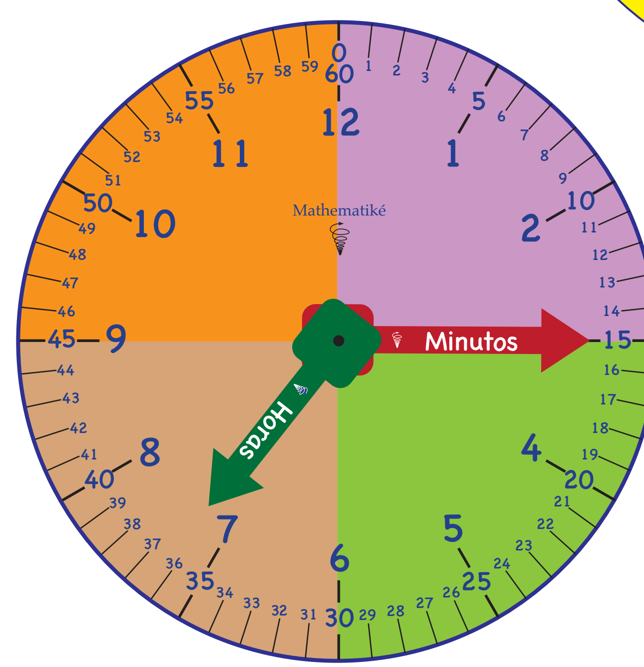
El reloj ahora señala a las 3 con 25 minutos.

Fracciones de hora

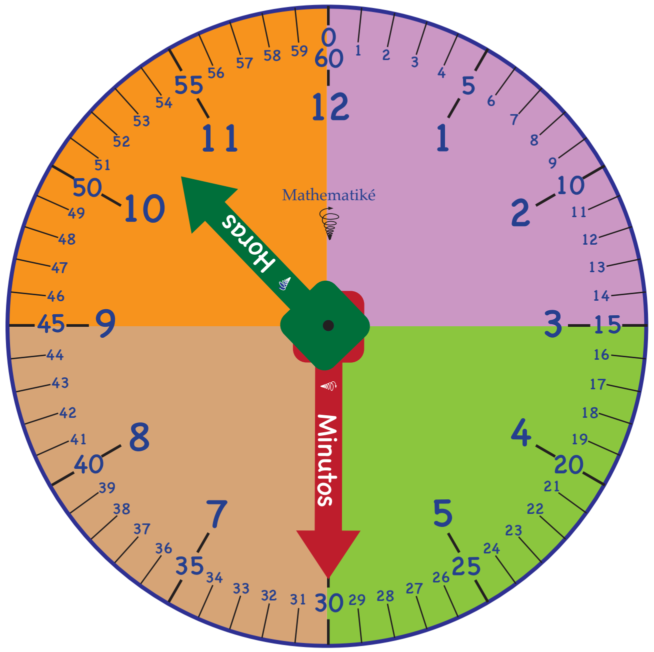


Podemos dividir en fracciones de hora la caratula del reloj, porque una vuelta completa de la manecilla grande representa una hora.





7 con 15 minutos.
7 y cuarto.

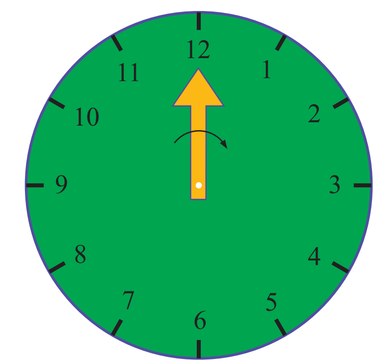


10 con 30 minutos.
10 y media.

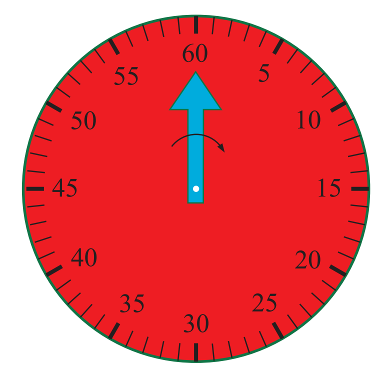
Tercer Nivel

Unidades para medir el tiempo

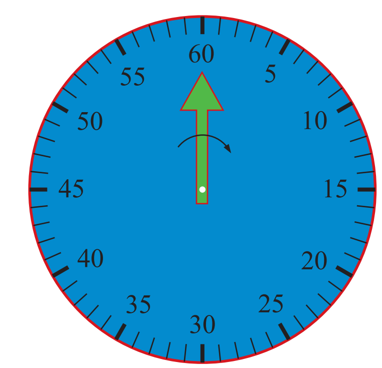
Un *día* tiene 24 *horas*.
Una *hora* tiene 60 *minutos*.
Un *minuto* tiene 60 *segundos*.



Hora
Unidad Para Medir Días
1 Día = 2 Vueltas = 24 Horas



Minuto
Unidad Para Medir Horas
1 Hora = 1 Vuelta = 60 Minutos



Segundo
Unidad Para Medir Minutos
1 Minuto = 1 Vuelta = 60 Segundos

El sistema para medir el tiempo se llama sexagesimal, porque está basado en el 60. Las fracciones de *hora* y de *minuto*, consisten en dividirlos en partes iguales. Por ejemplo, media *hora* tiene 30 *minutos* y medio *minuto* tiene 30 *segundos*.

Unidades de Medición: Longitud

Segundo Nivel

Longitud

El metro

El metro lo utilizamos para medir distancias o longitudes.

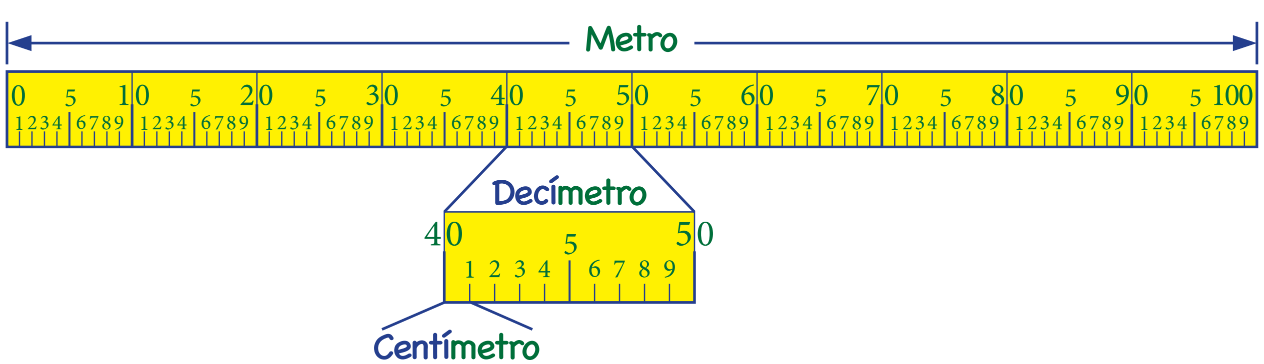
El metro es una unidad decimal, es decir, lo podemos dividir en 10 partes y cada parte a su vez la podemos dividir también en 10 partes.

Para identificar las partes que componen un metro utilizamos los prefijos:

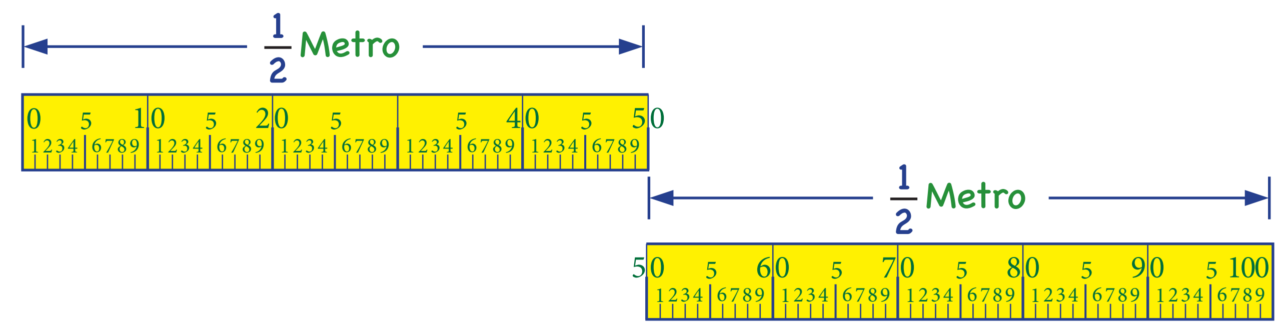
1. Deci: diez.
2. Centi: cien.
3. Mili: mil.

Los nombres y las abreviaciones de las partes de un metro son:

1. Decímetro: *dm*.
2. Centímetro: *cm*.
3. Milímetro: *mm*.



Con el metro podemos hacer fracciones, al igual que lo hacemos con las figuras geométricas.



$\frac{1}{2}$ Metro = 5 Decímetros = 50 Centímetros

Tercer Nivel

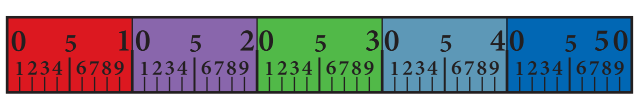
El metro. Unidad decimal

El metro, es la unidad básica del sistema métrico decimal para medir longitudes.

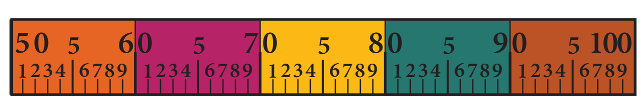
El sistema que utilizamos se llama decimal, porque se arma uniendo pedazos de 10 unidades cada uno. 1 metro está compuesto de 10 decímetros, 1 decímetro de 10 centímetros y 1 centímetro de 10 milímetros.

Debido a que el metro está formado de pedazos del mismo tamaño, es muy fácil formar fracciones de metro.

Si dividimos el metro en dos partes iguales, cada una de ellas tiene 5 decímetros, 50 centímetros o 500 milímetros y corresponde a medio metro.

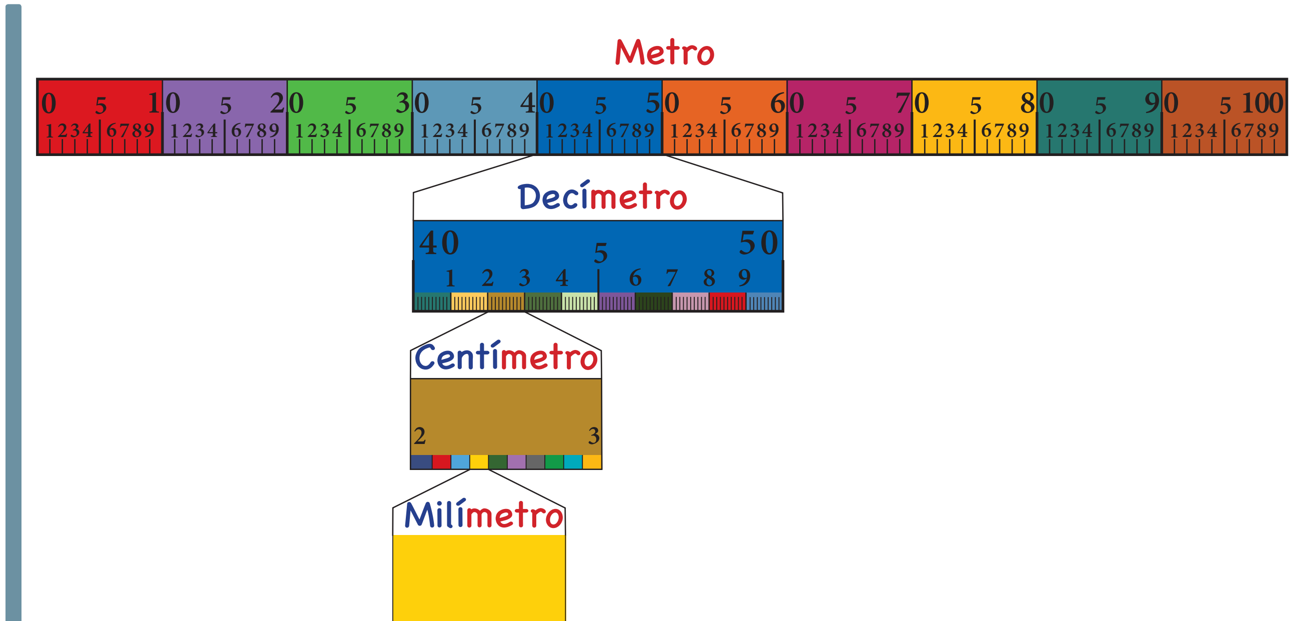


Medio metro = $\frac{1}{2}\,m = 5\,dm = 50\,cm = 500\,mm$

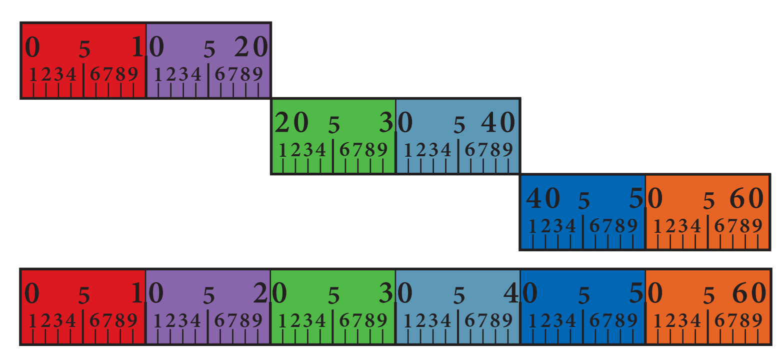


Medio metro = $\frac{1}{2}\,m = 5\,dm = 50\text{ cm} = 500\,mm$

De la misma forma, dividimos el metro en cuartos y quintos.



Una vez que hemos fraccionado el metro, podemos sumar fracciones de metro que son del mismo tamaño.



$$\frac{1}{5}\text{ m} + \frac{1}{5}\text{ m} + \frac{1}{5}\text{ m} = \frac{3}{5}\text{ m} = 6\text{ dm} = 60\text{ cm} = 600\text{ mm}$$

Sistema Métrico Decimal

Cuarto Nivel

Características del sistema métrico decimal

El metro

El metro lo utilizamos para medir distancias o longitudes.

El metro es una unidad decimal, es decir, lo podemos dividir en 10 partes y cada parte a su vez la podemos dividir también en 10 partes.