Diplomado Mathematiké

Certificación de Profesores de Matemáticas

2017-2018

Módulo VII

Temas Selectos de Matemáticas

Material de Trabajo

Mathematiké

Una Forma Integral, Inteligente y Creativa de Aprender Matemáticas

Aritmética Pre Escolar

Tercer Grado

MORENO

El Espacio

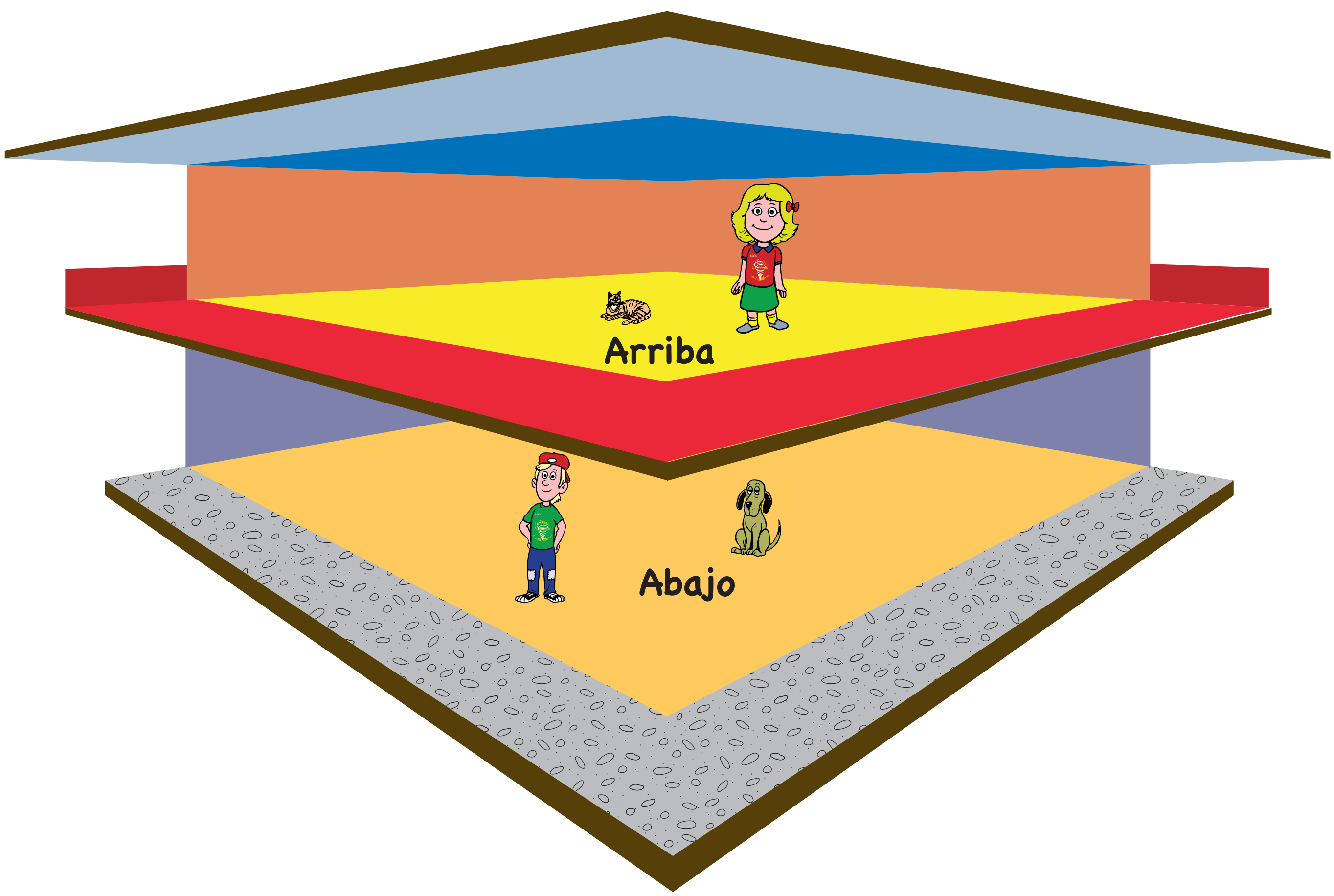
Todo lo Que Nos Rodea

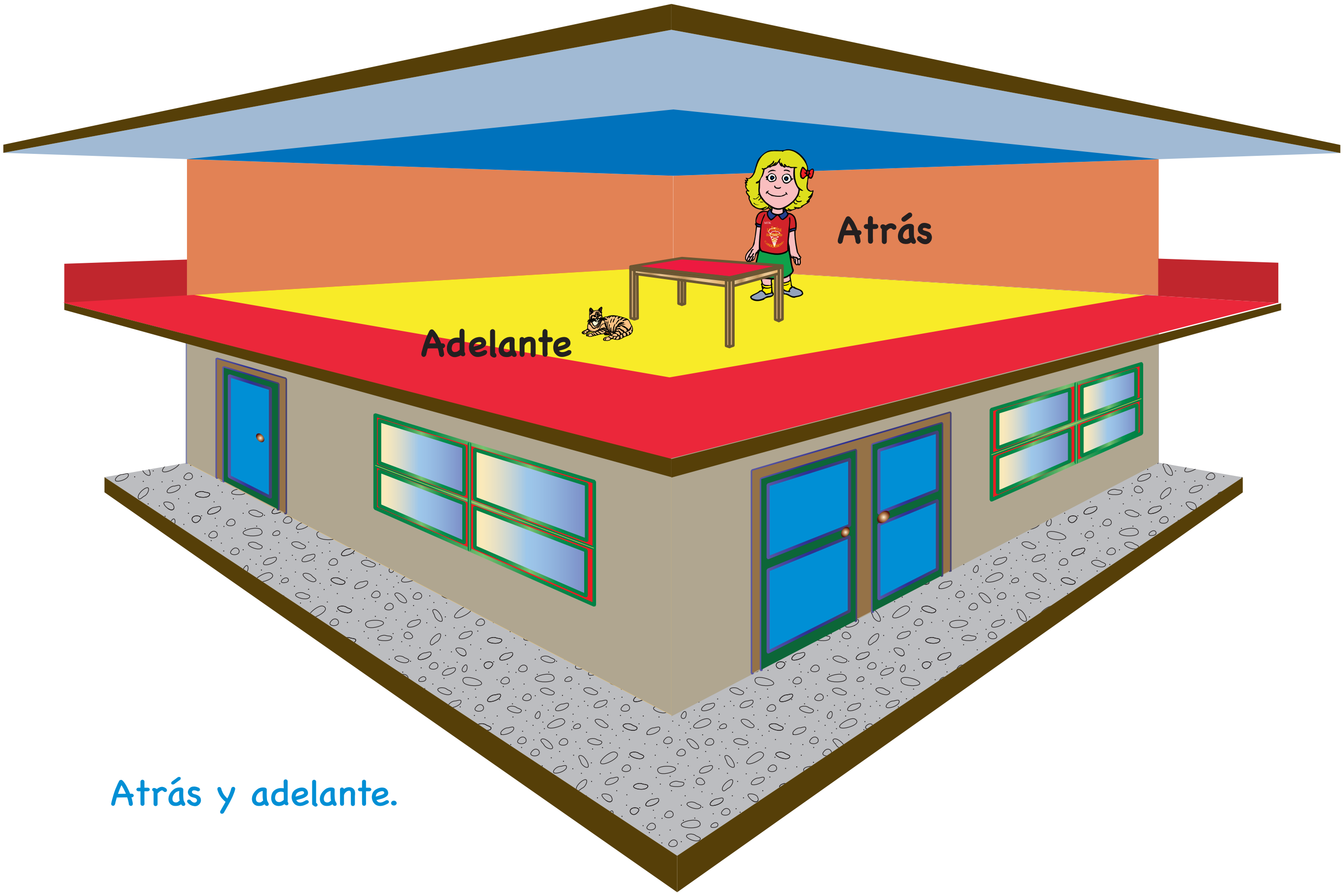
El espacio es el lugar donde caminamos, corremos, dormimos, jugamos y hacemos todas nuestras actividades diarias.

Para localizar los objetos que hay en el espacio en el que vivimos, utilizamos las palabras:

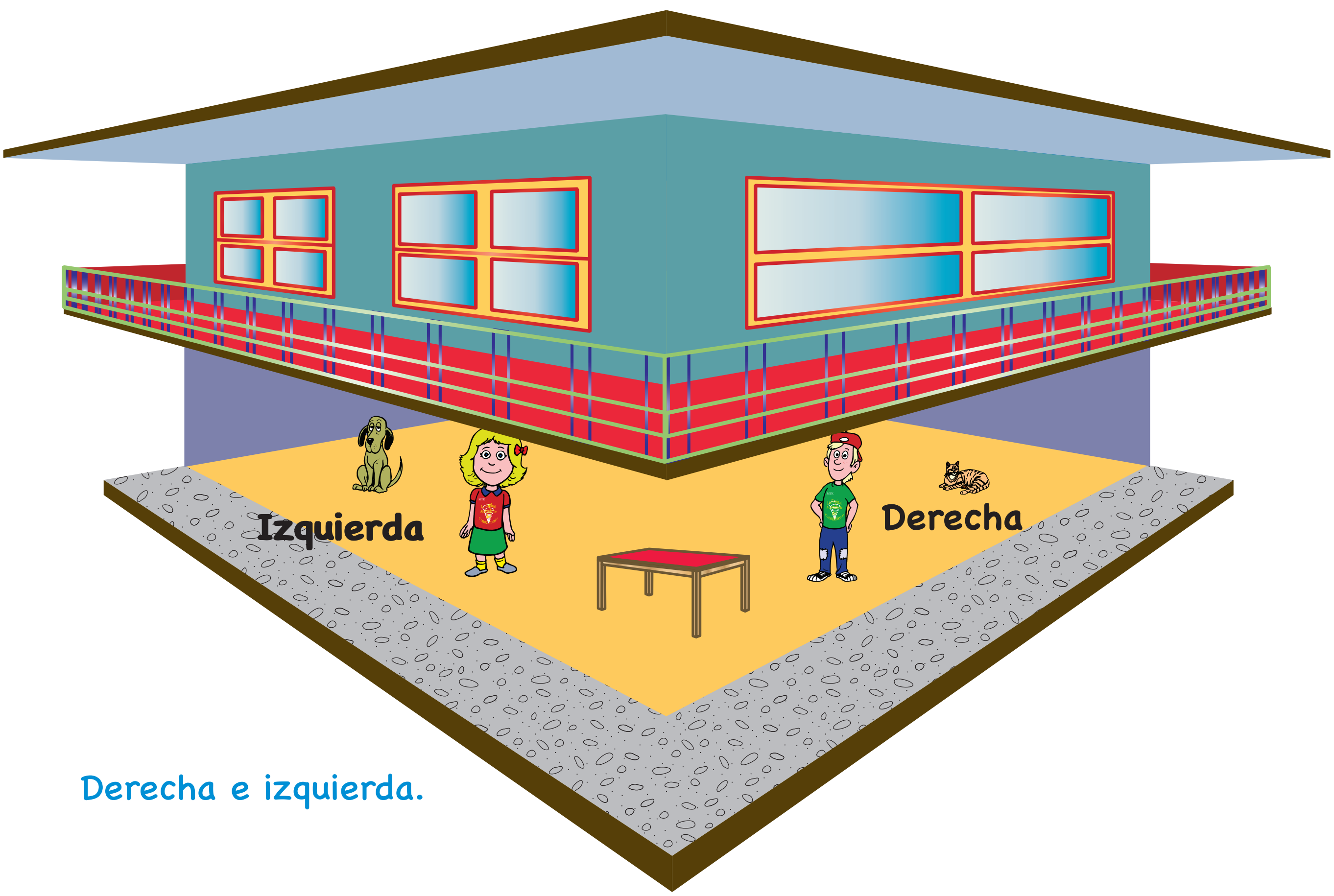
Arriba y abajo.
Atrás y adelante.
Derecho e izquierdo.
Afuera y adentro.
Abierto y cerrado.
Lejos y cerca.

Arriba y abajo.



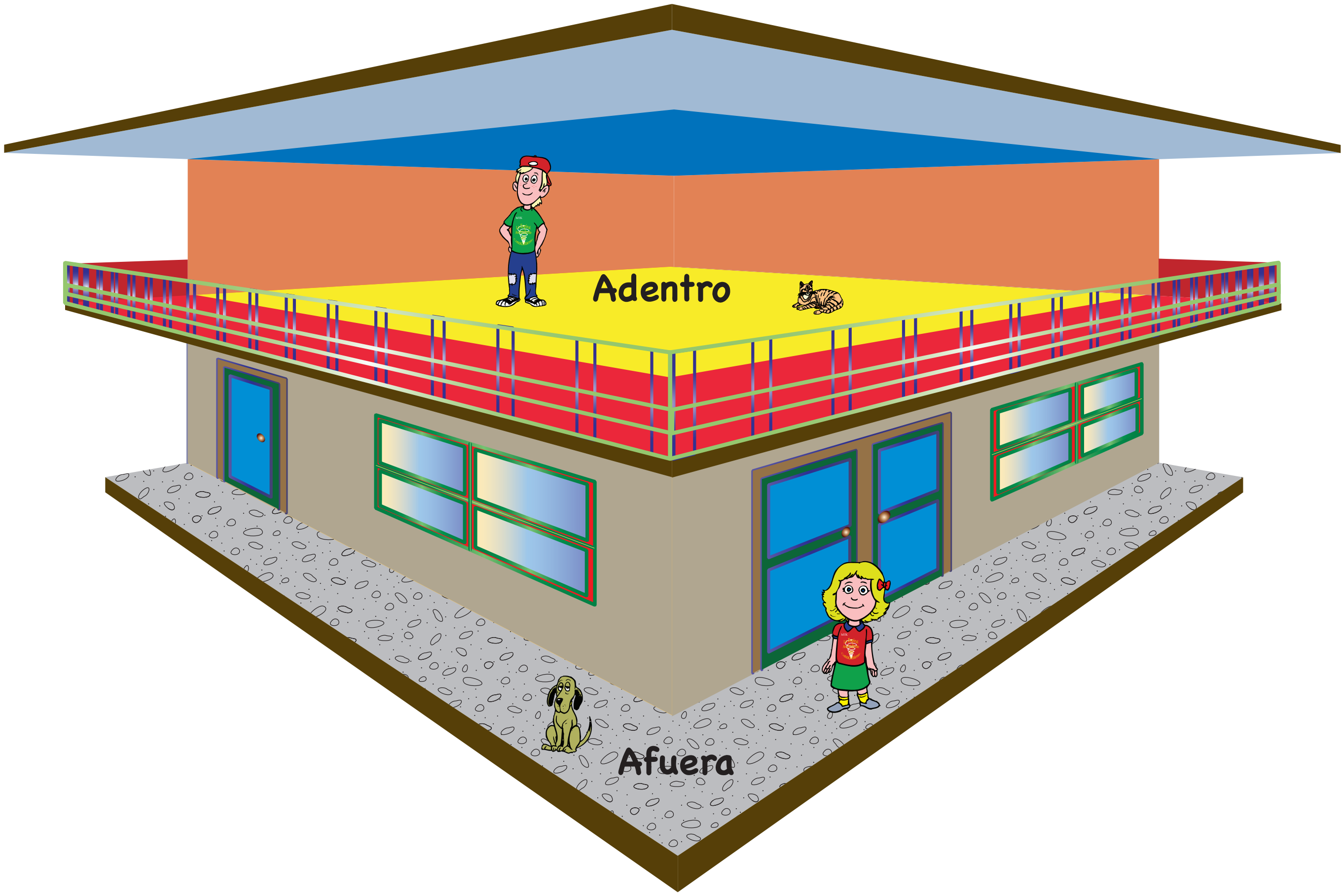


Atrás y adelante.

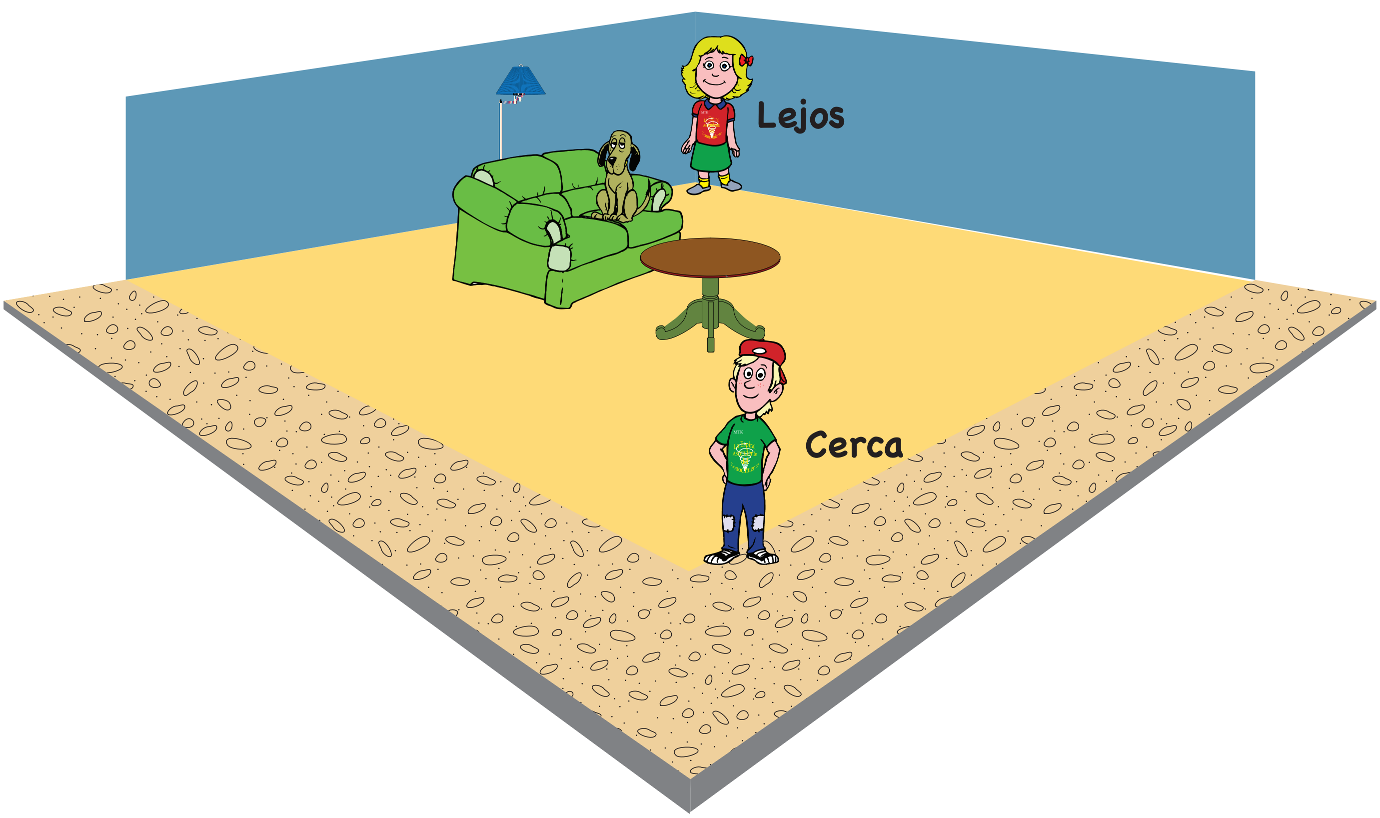


Derecha e izquierda.

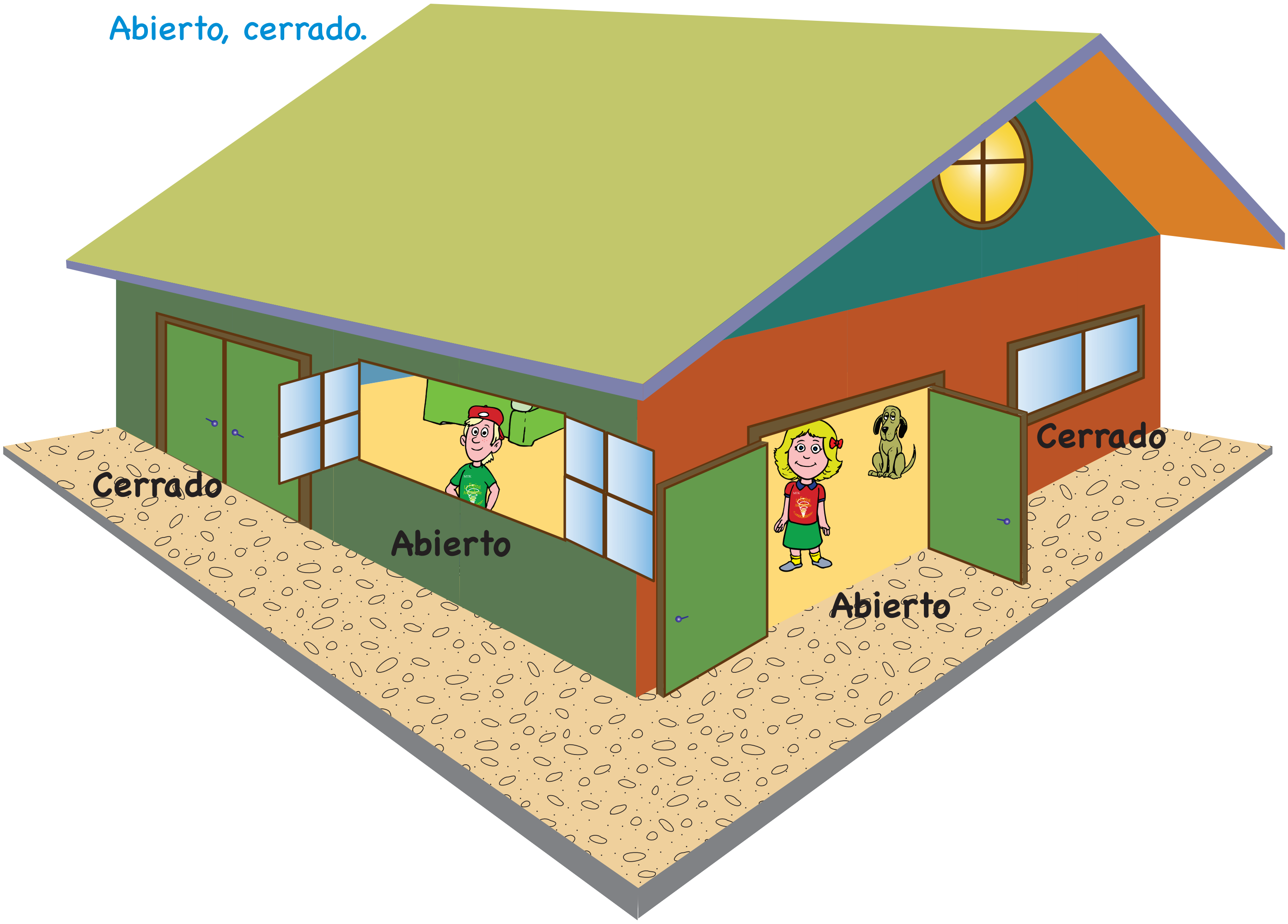
Afuera y adentro.



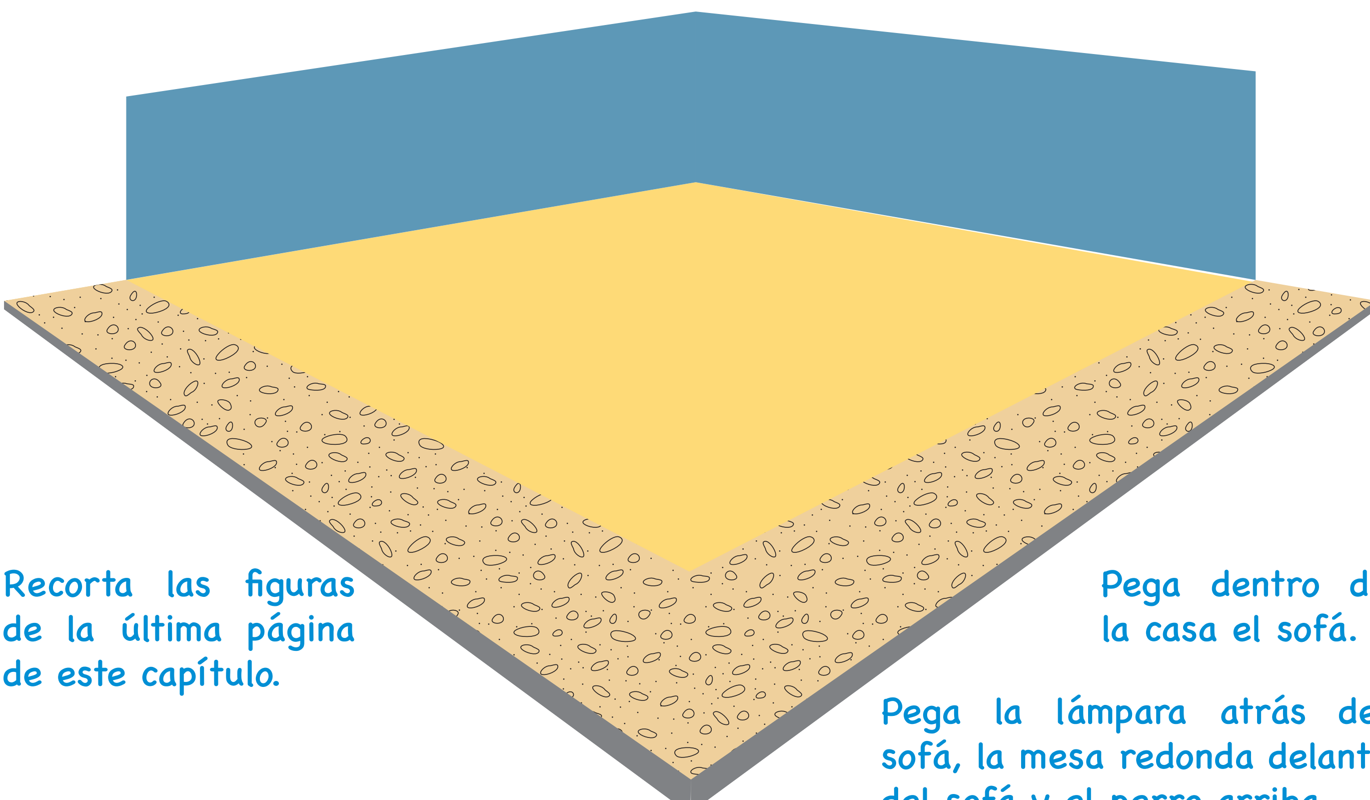
Cerca, lejos.



Abierto, cerrado.



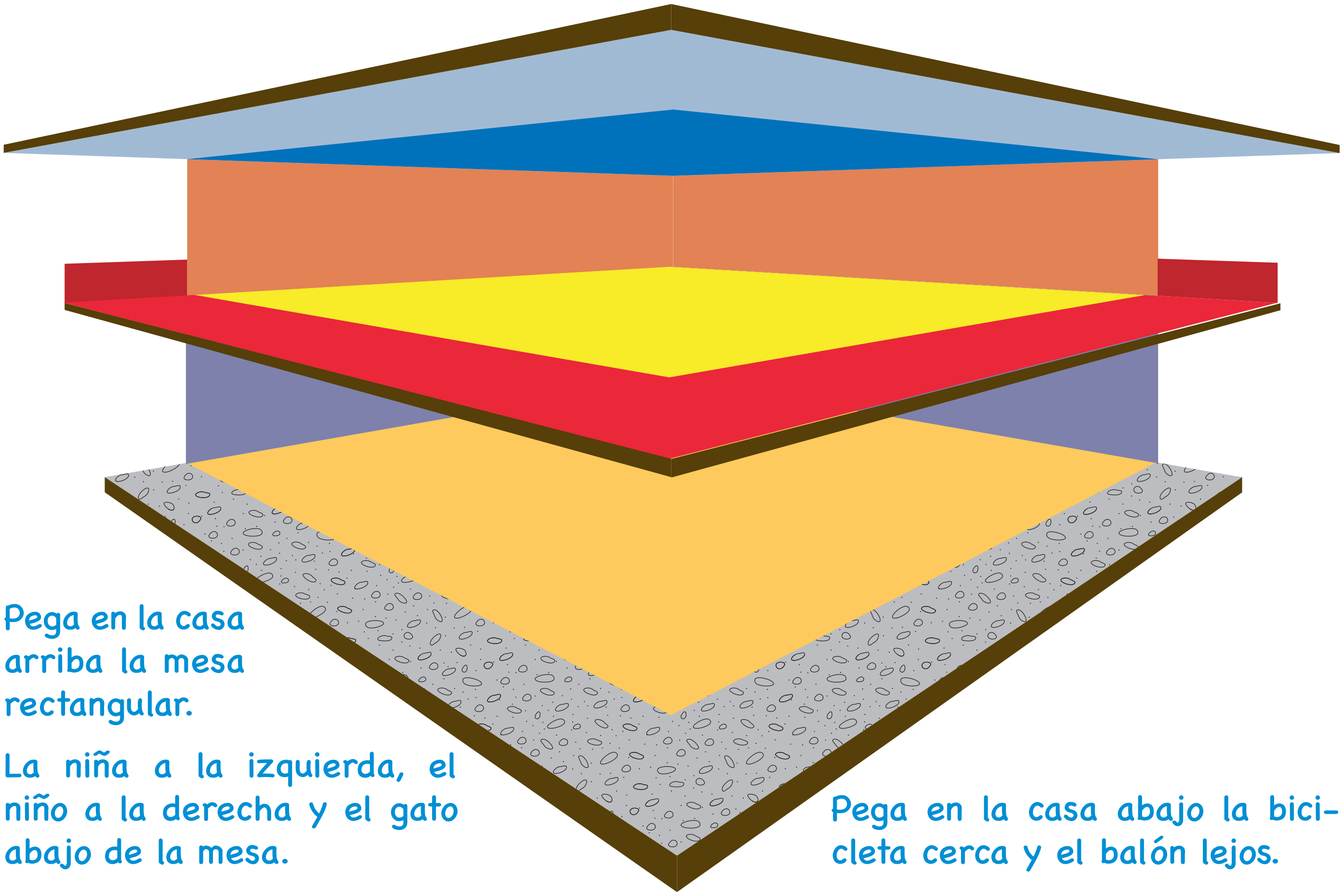
Ejercicios Para Practicar el Conocimiento



Recorta las figuras de la última página de este capítulo.

Pega dentro de la casa el sofá.

Pega la lámpara atrás del sofá, la mesa redonda delante del sofá y el perro arriba.



Pega en la casa arriba la mesa rectangular.

La niña a la izquierda, el niño a la derecha y el gato abajo de la mesa.

Pega en la casa abajo la bicicleta cerca y el balón lejos.

Pega el árbol a la derecha y la fuente a la izquierda. El niño volteando para atrás cerca del árbol y la niña volteando para atrás lejos de la fuente. Pega los perros y el gato donde quieras.

Todas las Cosas las Medimos

No solamente nos interesa saber en dónde están las cosas, también queremos conocer sus medidas y color.

Para clasificar los objetos de la naturaleza, utilizamos las palabras:

Alto y bajo.
Largo y corto.
Grande, mediano y pequeño.
Grueso y delgado.
Pesado y ligero.

Alto y bajo.

Alto

Bajo

Alto

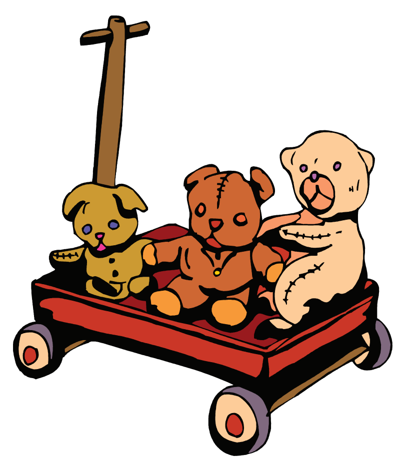
Bajo

Grande, mediano y pequeño.

Grande

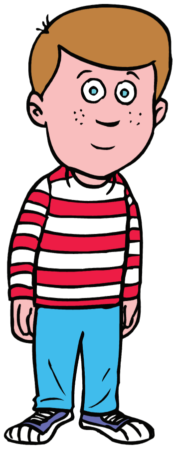
Mediano

Pequeño



Pequeño Mediano Grande

Ligero y pesado.

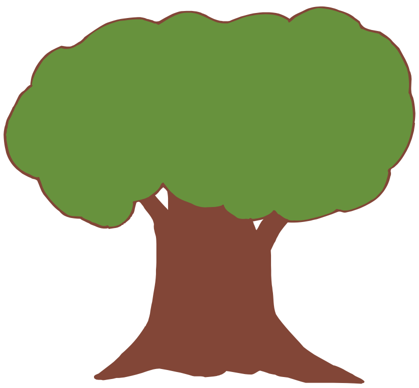



Pesado Ligero

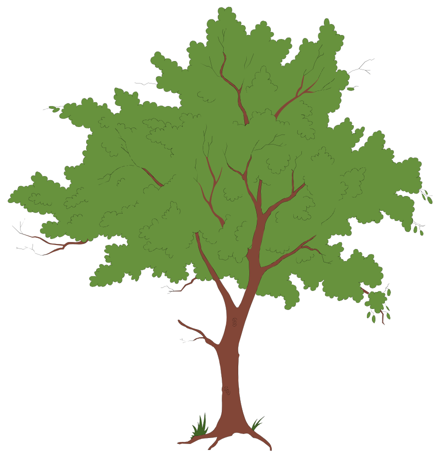
Ligero

Pesado

Grueso y delgado.



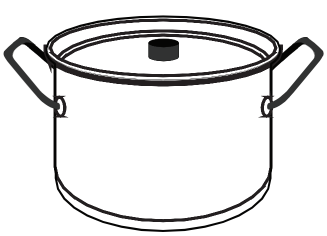
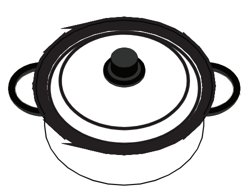
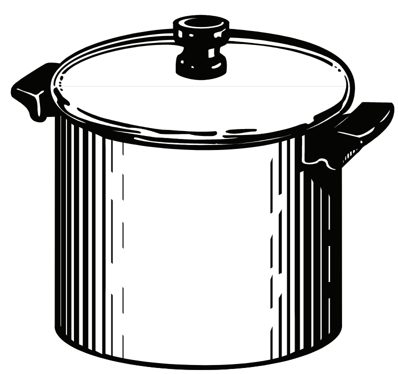
Grueso



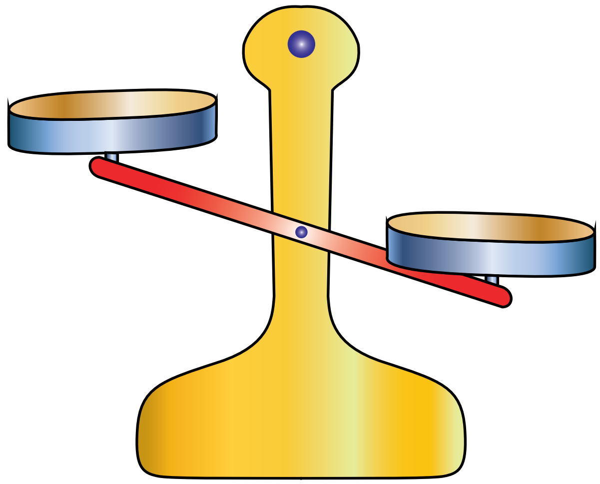
Delgado

Ejercicios Para Practicar el Conocimiento

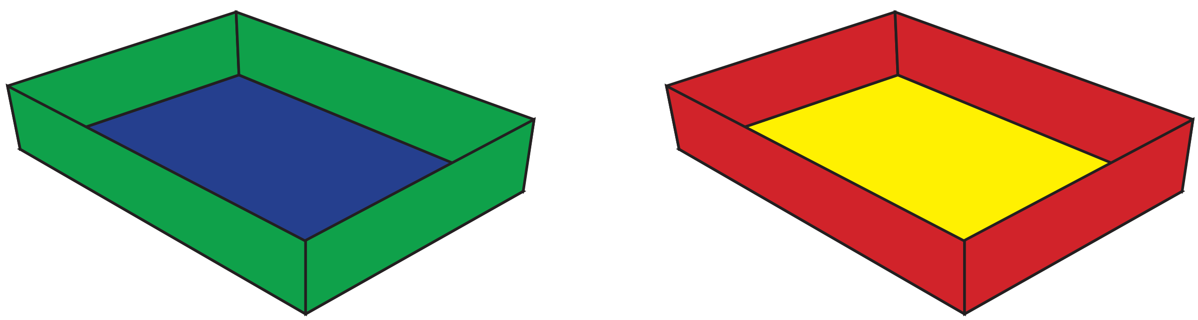
Colorea de azul la olla grande, de verde la mediana y de amarillo la pequeña.

Pega en el lugar correspondiente de la báscula los libros pesados y el libro ligero.



Pega dentro de la charola verde con azul el tornillo delgado y dentro de la charola rojo con amarillo el tornillo grueso.



Los Puntos Cardinales

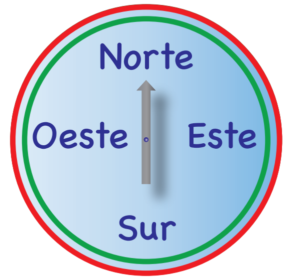
Otra forma de orientarnos en el espacio en el cual vivimos es utilizando los cuatro puntos cardinales.

Los nombres de los puntos cardinales son:

Cómo Localizar los Puntos Cardinales

La Brújula

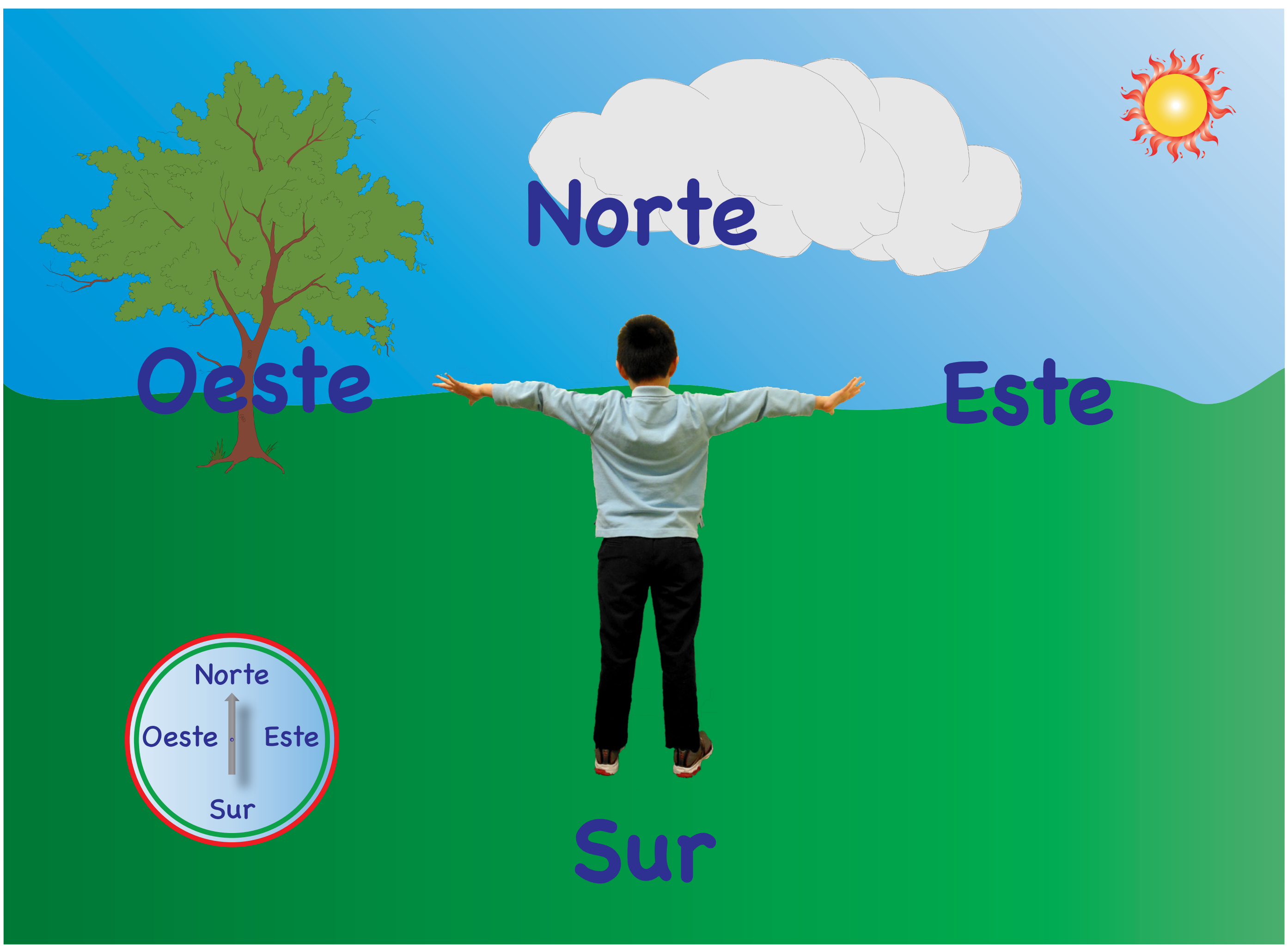
El instrumento que utilizamos para localizar los puntos cardinales es la brújula.
La brújula tiene una aguja que señala hacia el norte.



El Sol

Si te pones de pie y extiendes los brazos y tu brazo derecho señala el Este, entonces tu brazo izquierdo señala el Oeste y tu estás viendo hacia el Norte y tu espalda señala el Sur.
El sol lo vemos salir en la mañana por el Este y ocultarse en la noche por el Oeste.

El experimento de la figura, lo puedes realizar temprano en la mañana para localizar los cuatro puntos cardinales.



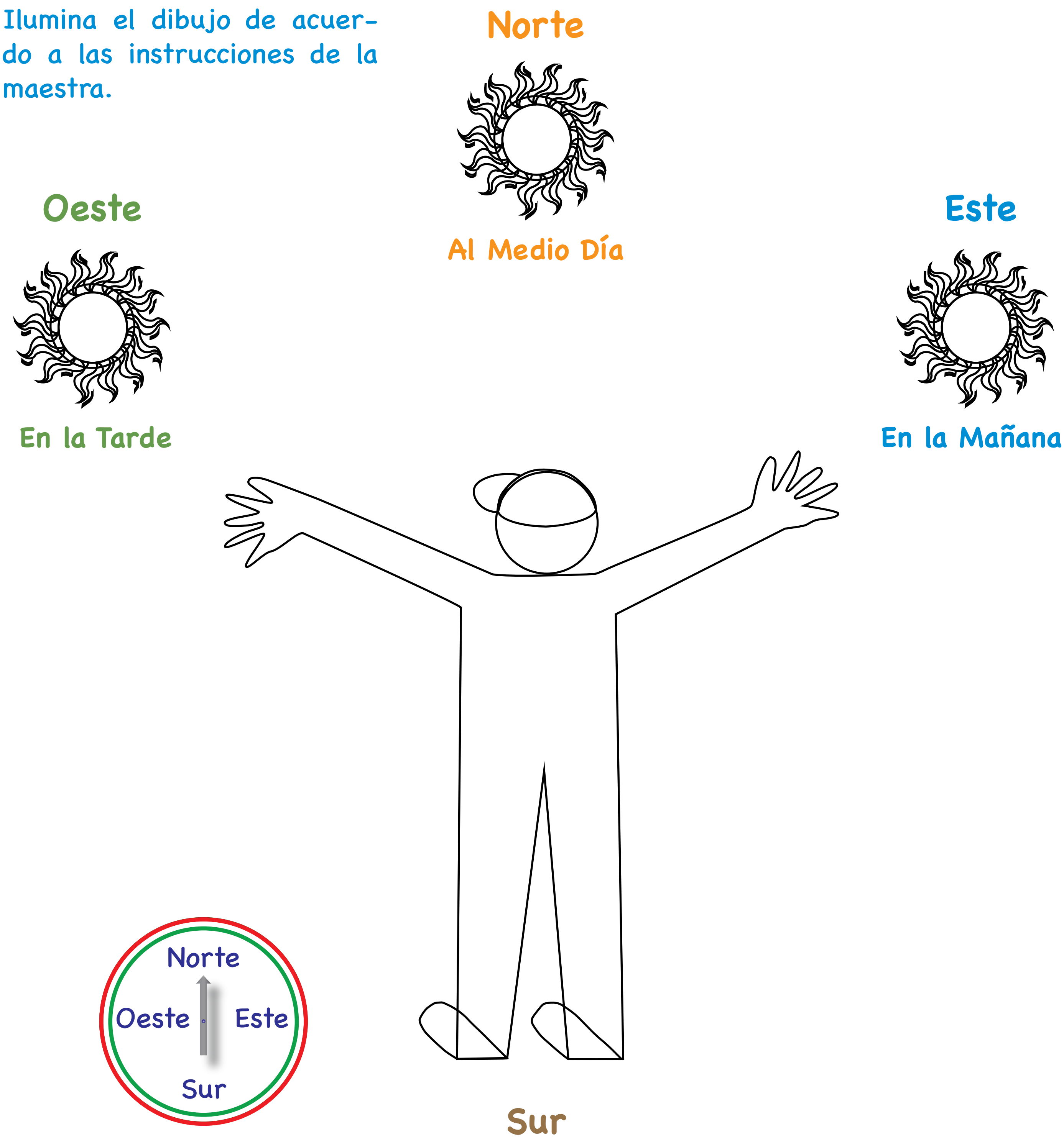
La posición del sol depende de la hora del día.

El sol sale en la mañana por el Este.
Al medio día está encima de nosotros.
En la tarde se oculta por el Oeste.

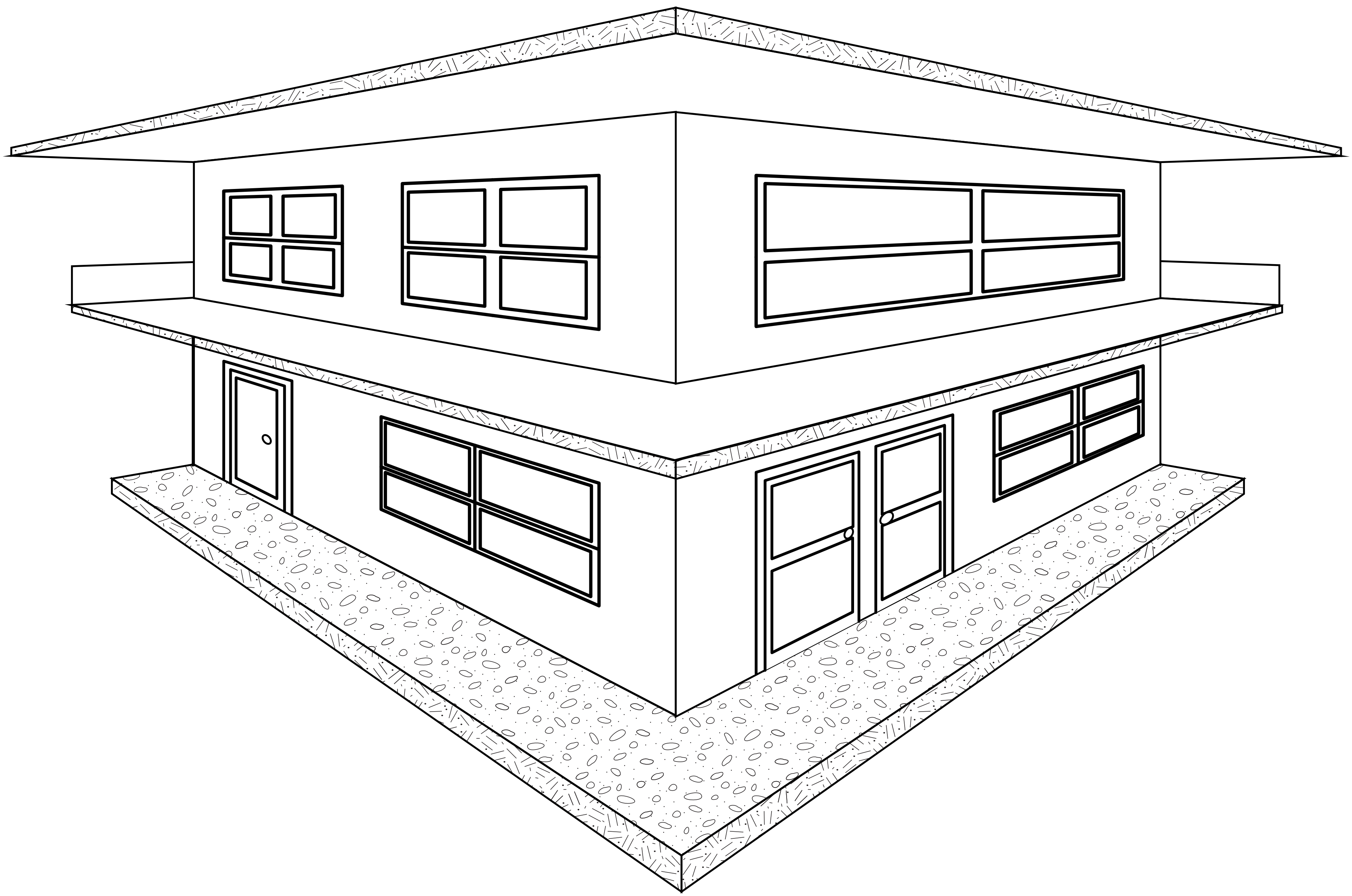
Cuando estés en tu casa dile a tus papás que quieres observar cómo el Sol va moviéndose durante el día.

Ejercicios Para Practicar el Conocimiento

Ilumina el dibujo de acuerdo a las instrucciones de la maestra.

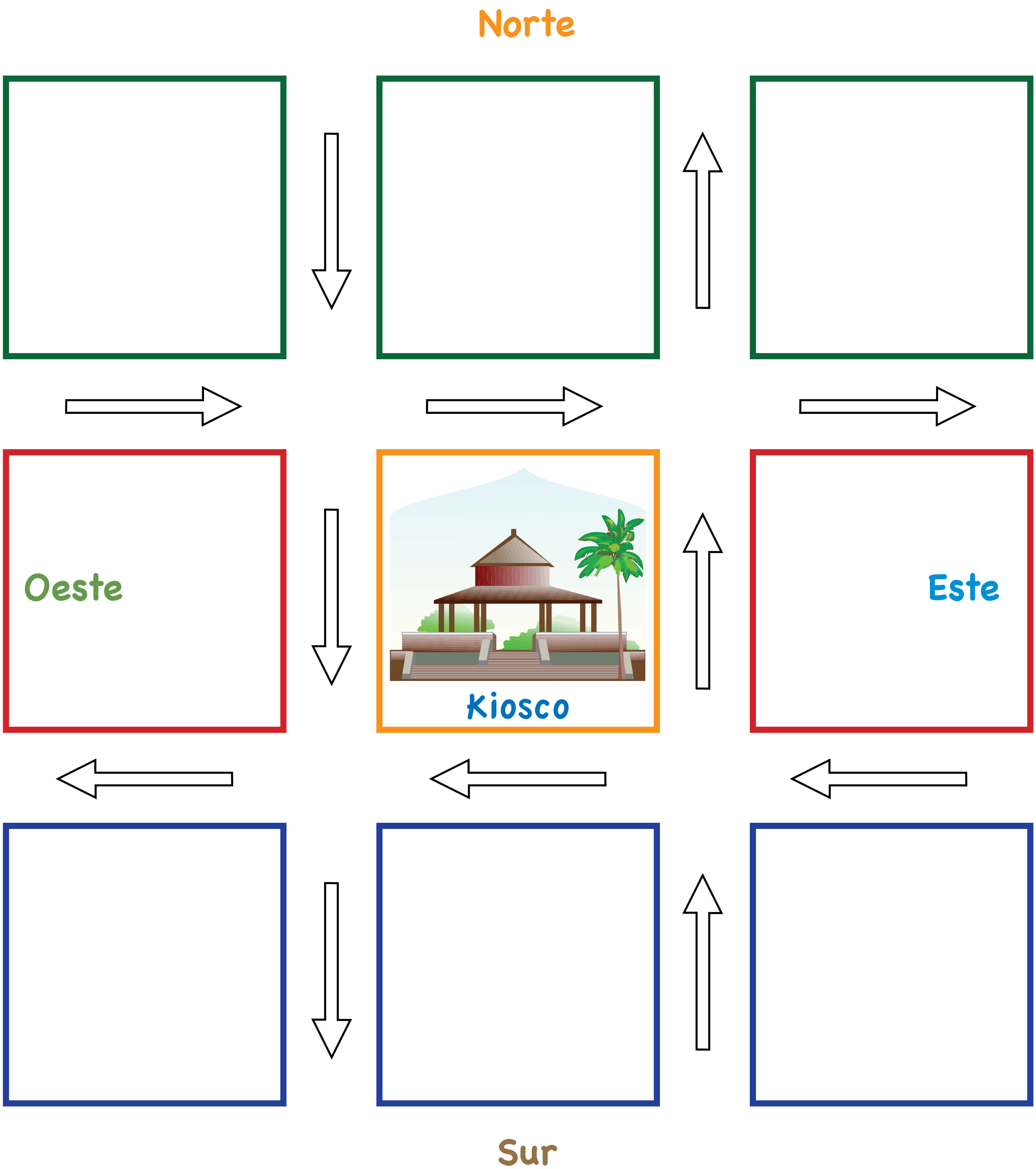


Ilumina la casa de acuerdo con las instrucciones de la maestra.



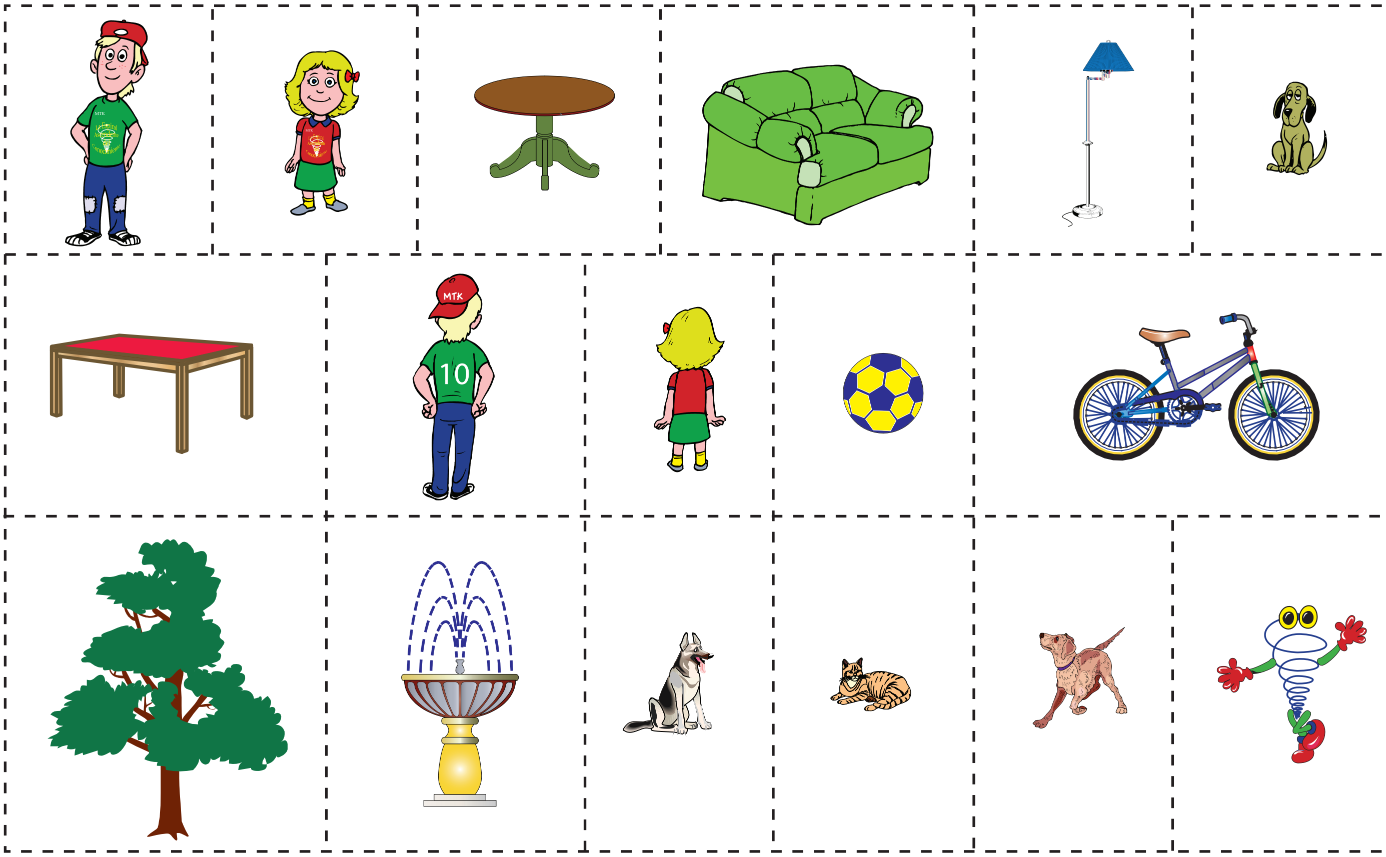
El mapa de una ciudad muestra nueve cuadras. En el centro se encuentra la plaza principal.

Trabaja la página, según las instrucciones que te dé la maestra.

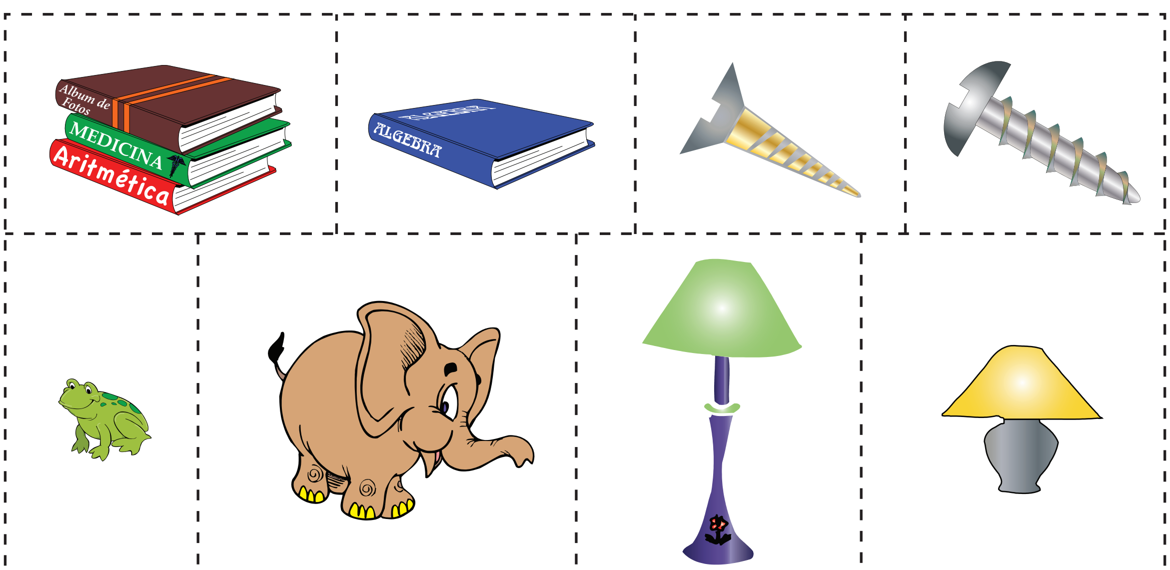


Figuras Para Recortar

Arriba y abajo, atrás y adelante, derecho e izquierdo, afuera y adentro, abierto y cerrado, lejos y cerca.

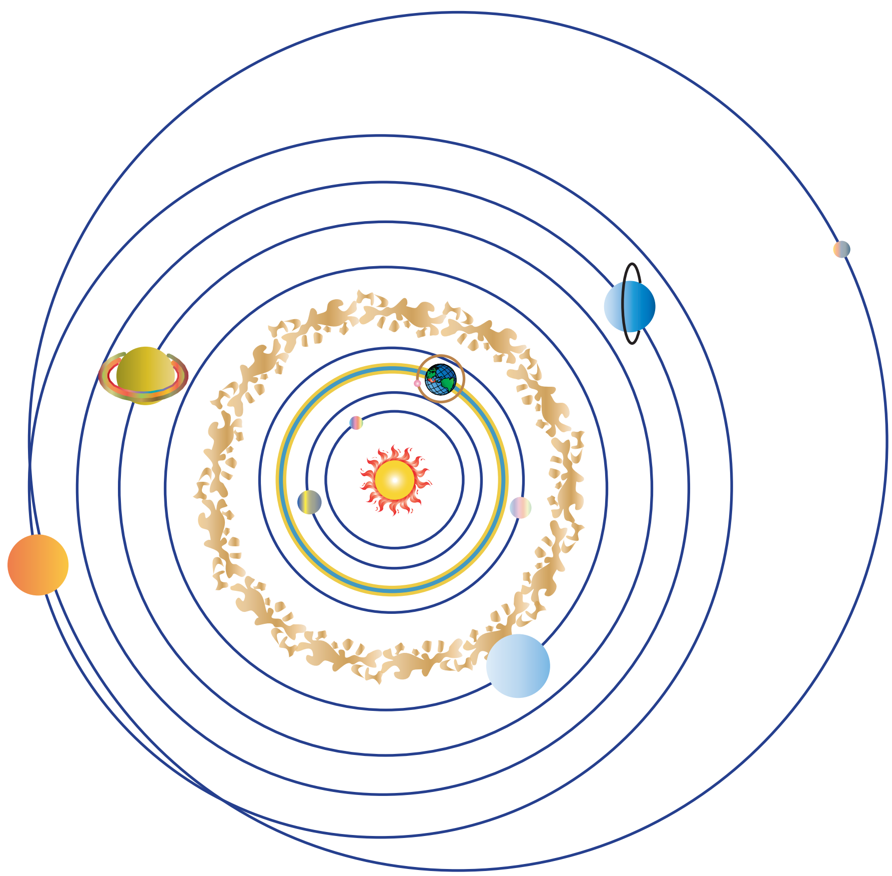


Alto y bajo, largo y corto, grande, mediano y pequeño, grueso y delgado, pesado y ligero.




Aritmética
Primer Año
Bienvenidos a la Escuela
mtk
Mathematiké
La Espiral Ascendente del Conocimiento
MORENO

El mundo en el que vivimos al que llamamos Tierra, es uno de los nueve planetas del Sistema Solar.

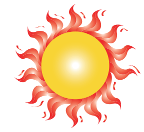


En la clase de geografía vas a estudiar los nombres de los Planetas.

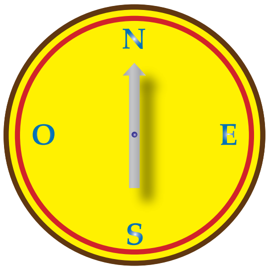
Localiza la Tierra en el dibujo del Sistema Solar.

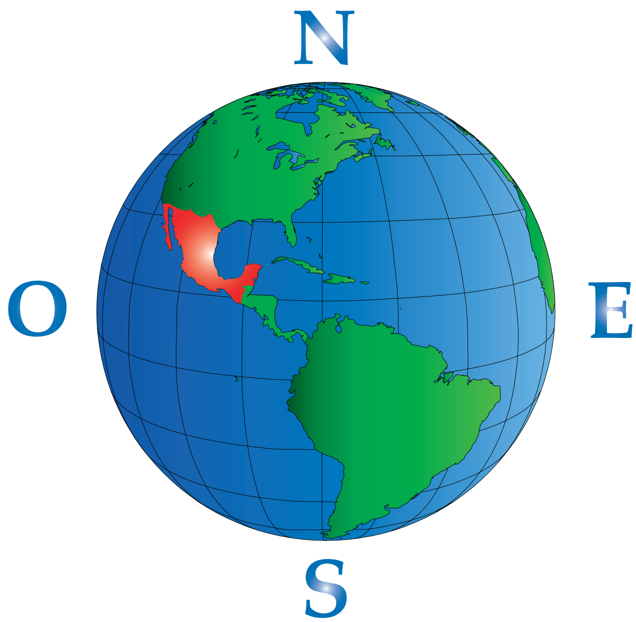
La Tierra es redonda como un balón de futbol.

Para ubicarnos en la Tierra utilizamos los Puntos Cardinales.



Para localizar los Puntos Cardinales utilizamos una brújula.



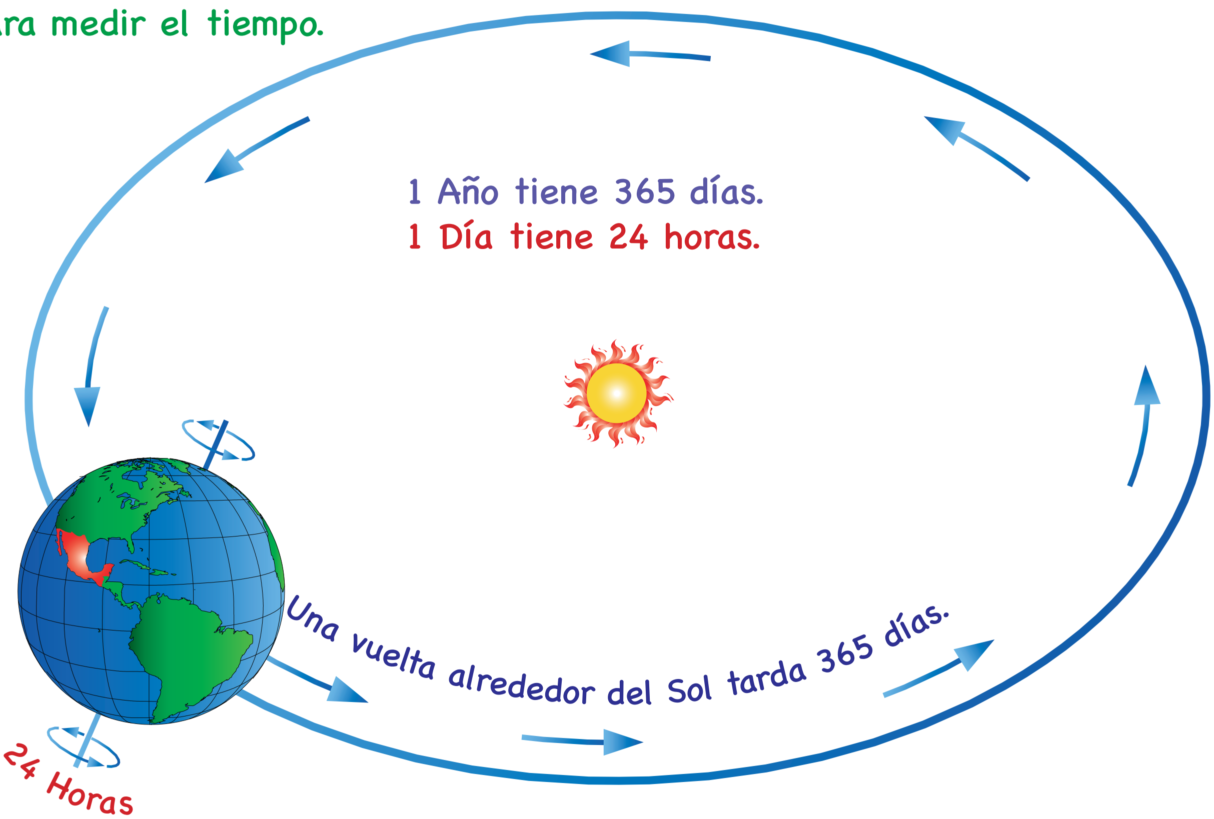


Norte.
Sur.
Este.
Oeste.

Como podemos observar en el Sistema Planetario, la Tierra gira alrededor del Sol. Tarda 365 días en completar una vuelta.

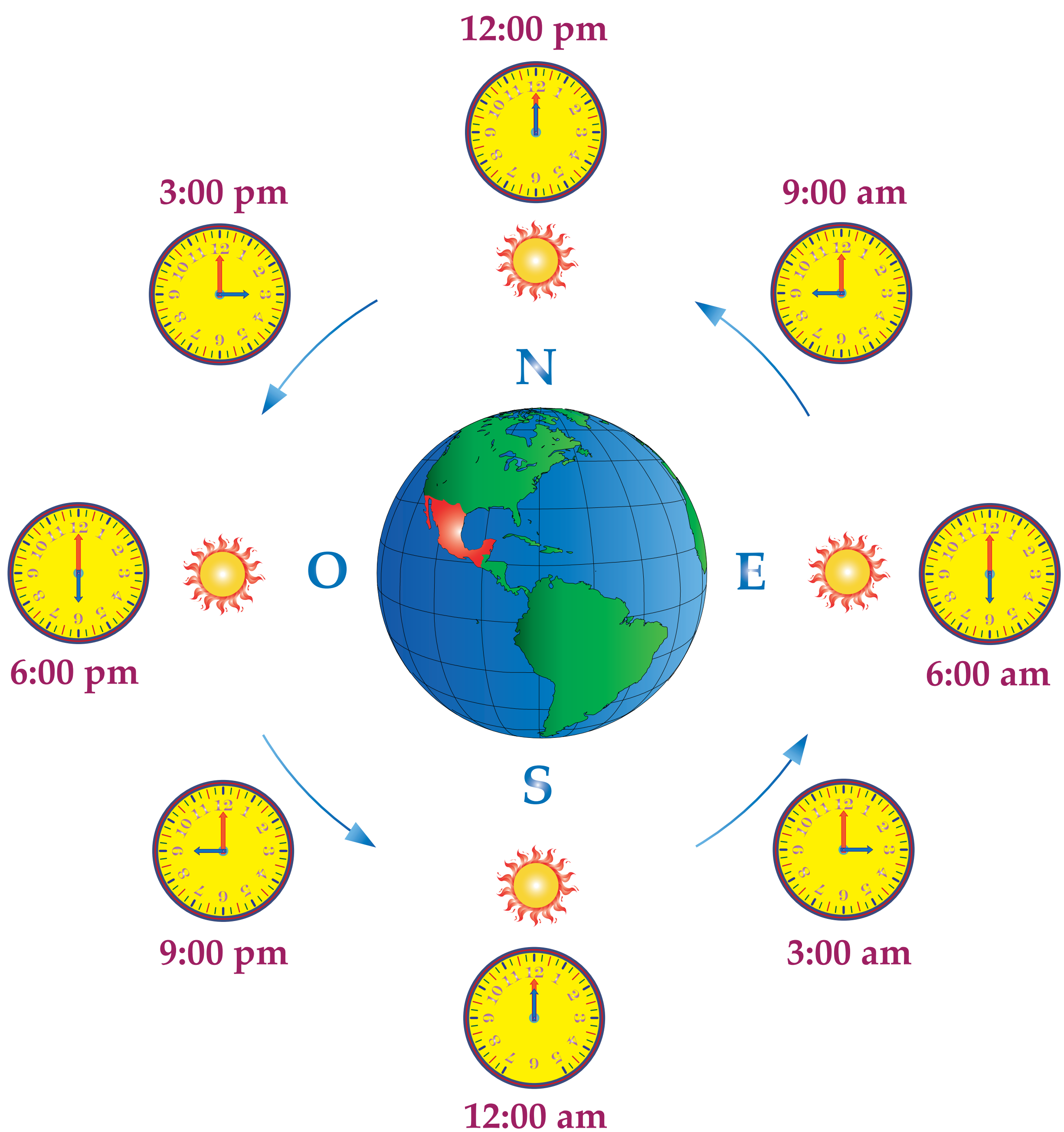
Utilizamos estos datos para medir el tiempo.

La Tierra también gira alrededor de su propio eje como podemos observar en el dibujo. La Tierra tarda 24 horas en dar una vuelta completa.



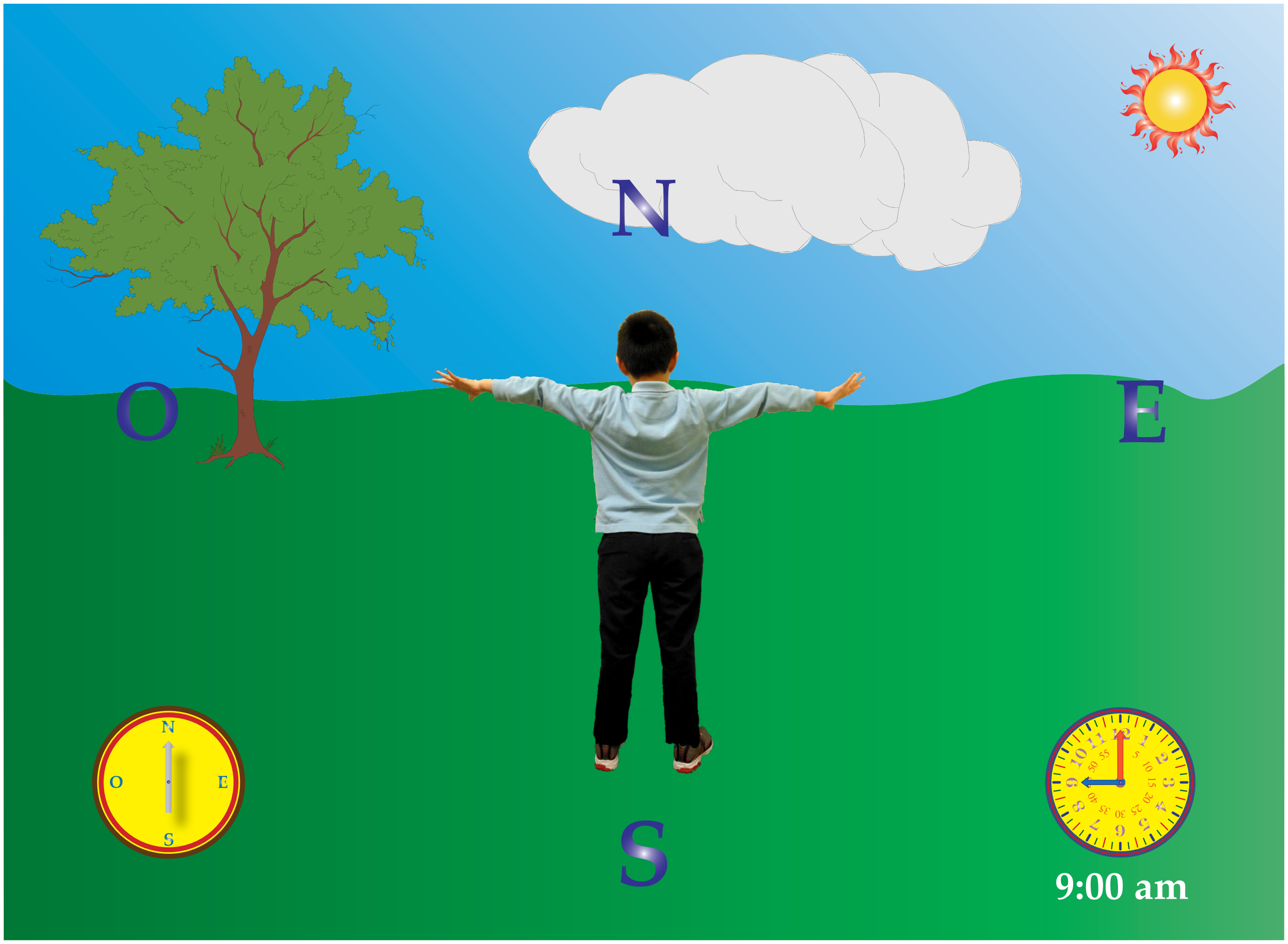
Al ir girando la Tierra alrededor de su eje, nosotros observamos que el Sol va girando al rededor de la Tierra.

Siguiendo el movimiento del Sol alrededor de la Tierra, medimos el tiempo utilizando un reloj.



Nosotros vemos salir el Sol en la mañana por el Este.
Al medio día el Sol está encima de nosotros.
En la tarde vemos que el Sol se oculta por el Oeste.

Si en la mañana nos paramos con los brazos abiertos y colocamos el brazo derecho señalando hacia el Sol, es decir hacia el Este, entonces enfrente de nosotros está el Norte, detrás el Sur y el brazo izquierdo señala hacia el Oeste.



Experimento en la casa.

En tu casa pídele a tus papás que te ayuden a medir el tiempo utilizando el movimiento del Sol.

Temprano en la mañana observa cómo el Sol sale por el Este.

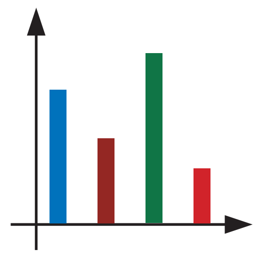
Utiliza una brújula para que localices los Puntos Cardinales.

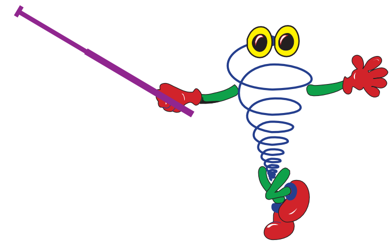
Haz un dibujo del lugar en dónde se encuentra el Sol y escribe la hora en la cuál hiciste la observación.

Repite el experimento varias veces durante el día.

Problemas de Estadística

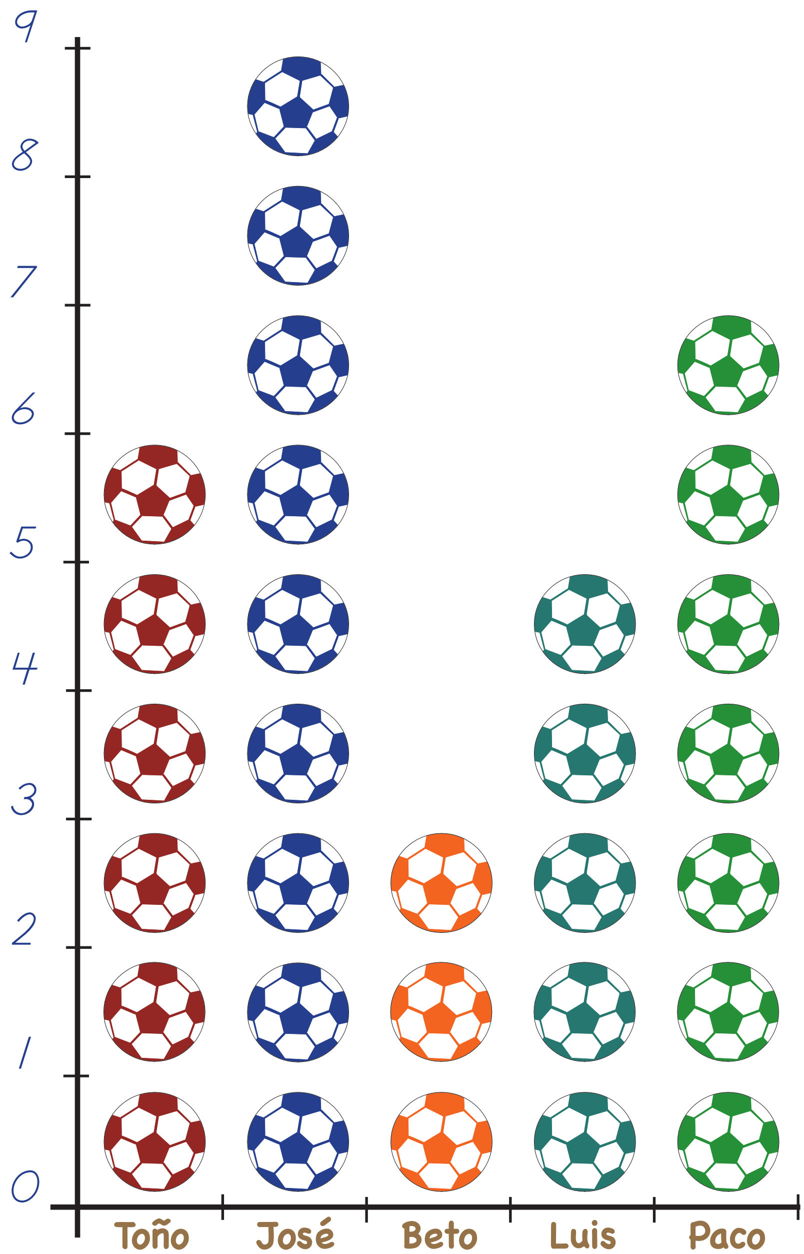
Gráfica de Barras





Cinco amigos jugaron futbol. Cada vez que alguno de los jugadores anotó un gol, dibujaron un balón formando una gráfica.

Cuenta cuántos goles anotó cada uno de ellos y escribe el nombre del ganador.



Toño = ☐ Goles

José = ☐ Goles

Beto = ☐ Goles

Luis = ☐ Goles

Paco = ☐ Goles

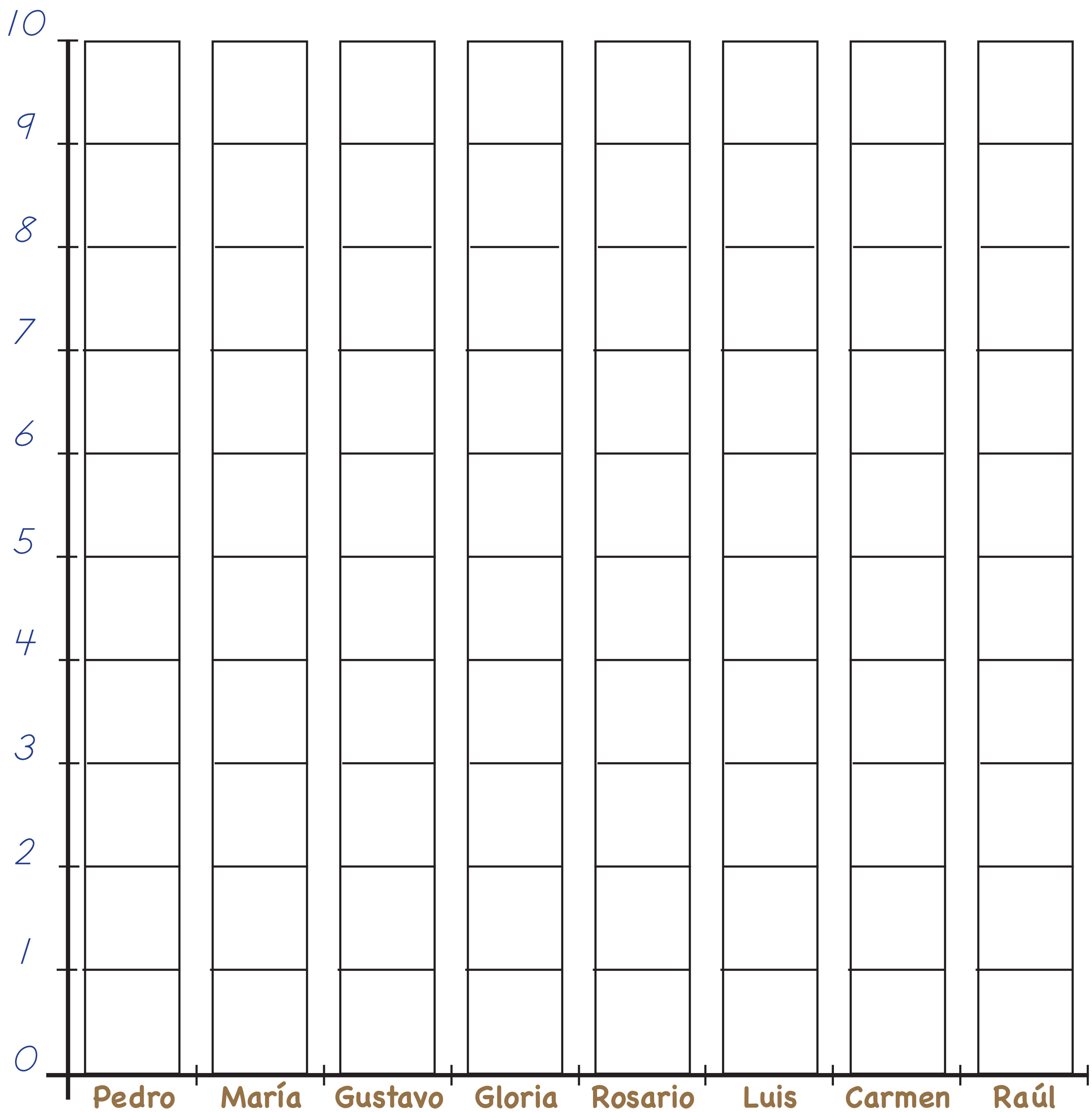
El ganador es: ______________

Examen de Español

Los resultados del examen de español de ocho alumnos del salón de clase son:

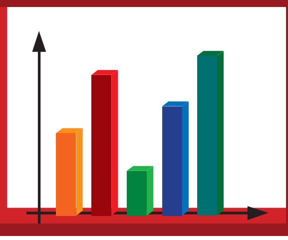
Pedro	6	Rosario	9
María	10	Luis	10
Gustavo	7	Carmen	7
Gloria	8	Raúl	4

Colorea la calificación de español de cada uno de los estudiantes en la columna correspondiente.



Aritmética Segundo Año

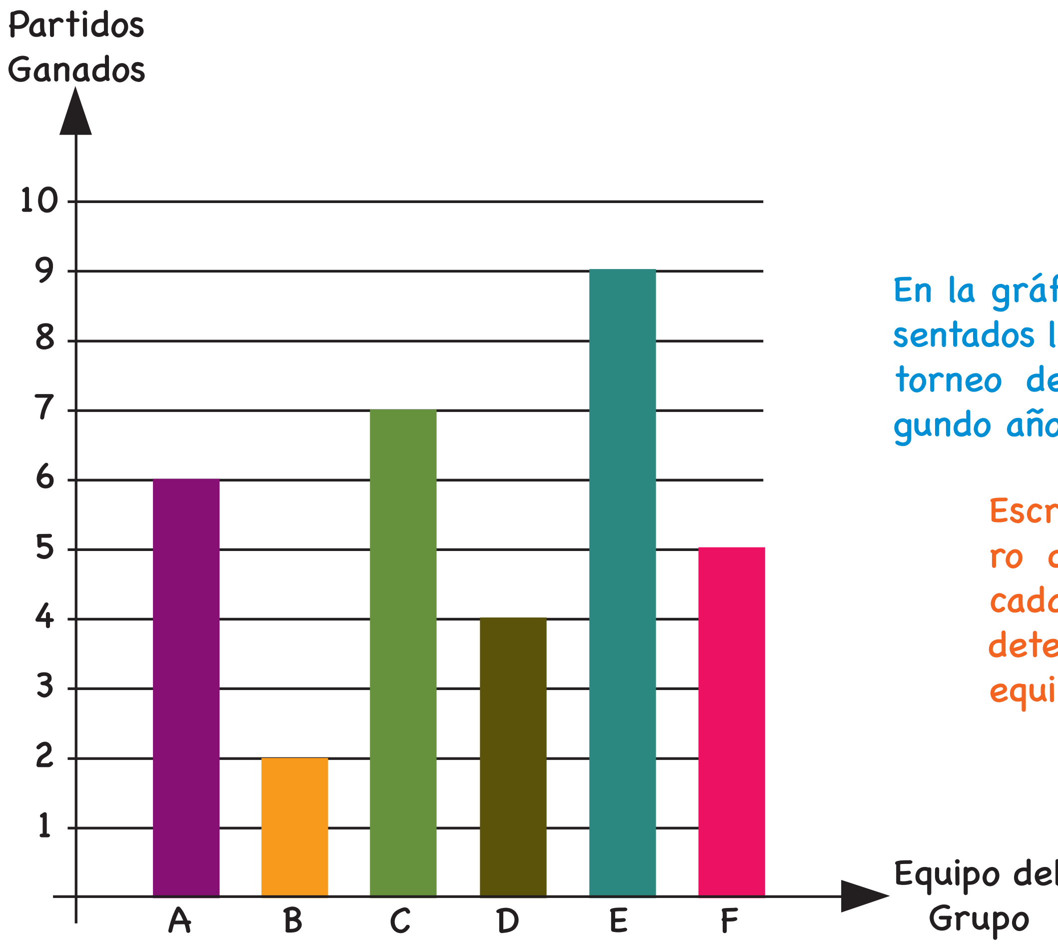
MORENO



Gráfica de Barras

Estadística

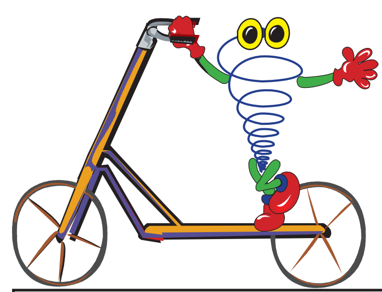
Gráficas de Barras



En la gráfica están representados los resultados del torneo de futbol de segundo año de primaria.

Escribe el número de partidos que cada salón ganó y determina cuál es el equipo ganador.

	Partidos Ganados		Partidos Ganados
Grupo A		Grupo D	
Grupo B		Grupo E	
Grupo C		Grupo F	

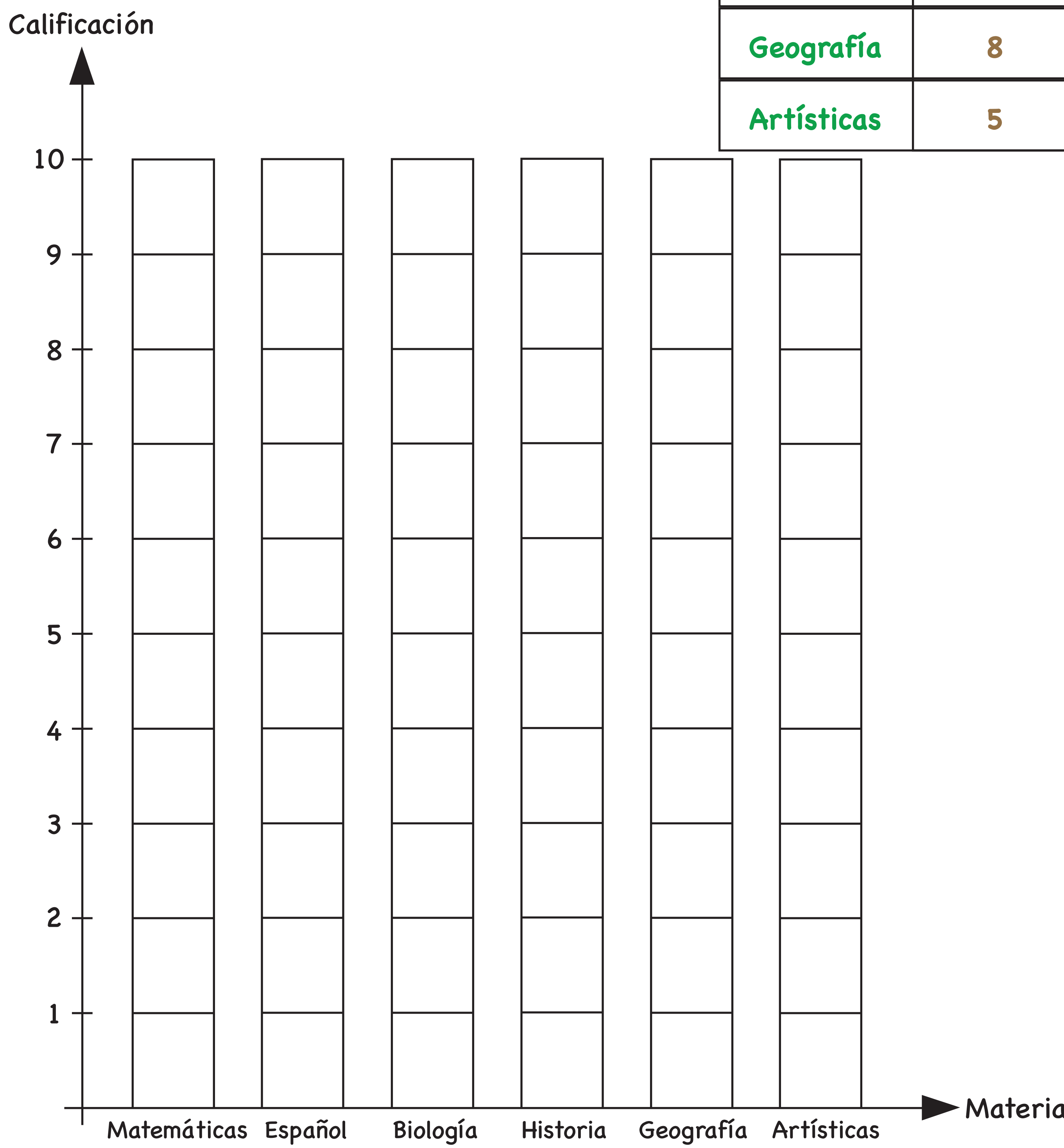


Grupo Ganador

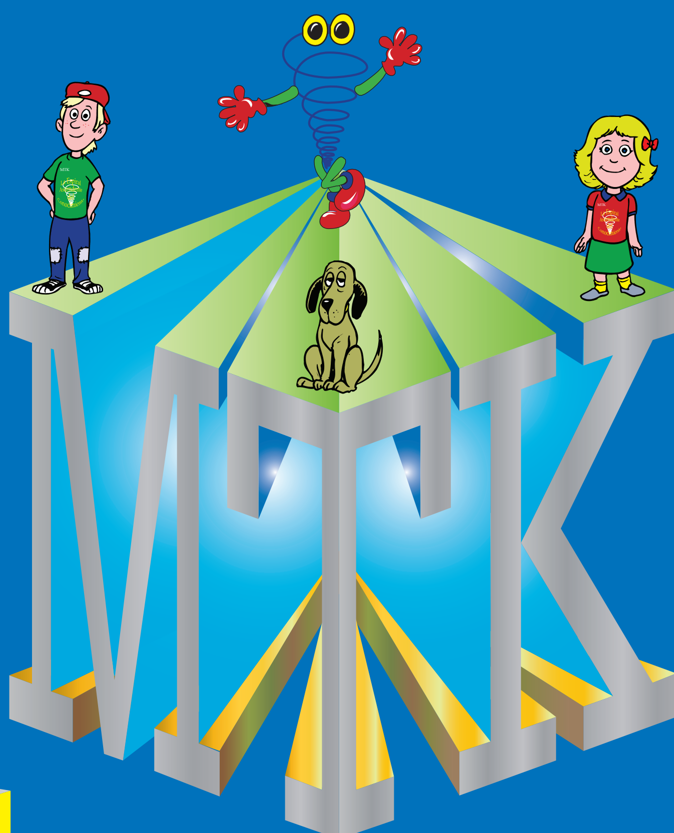
Las calificaciones que Alejandra obtuvo durante el mes de octubre son:

	Calificación
Matemáticas	10
Español	4
Biología	9
Historia	6
Geografía	8
Artísticas	5

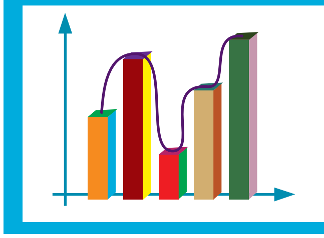
Representa las calificaciones en la gráfica de barras.
Colorea del color que quieras los resultados de cada una de las materias.



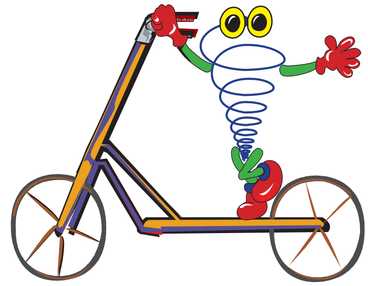
Aritmética
Tercer Año



MORENO

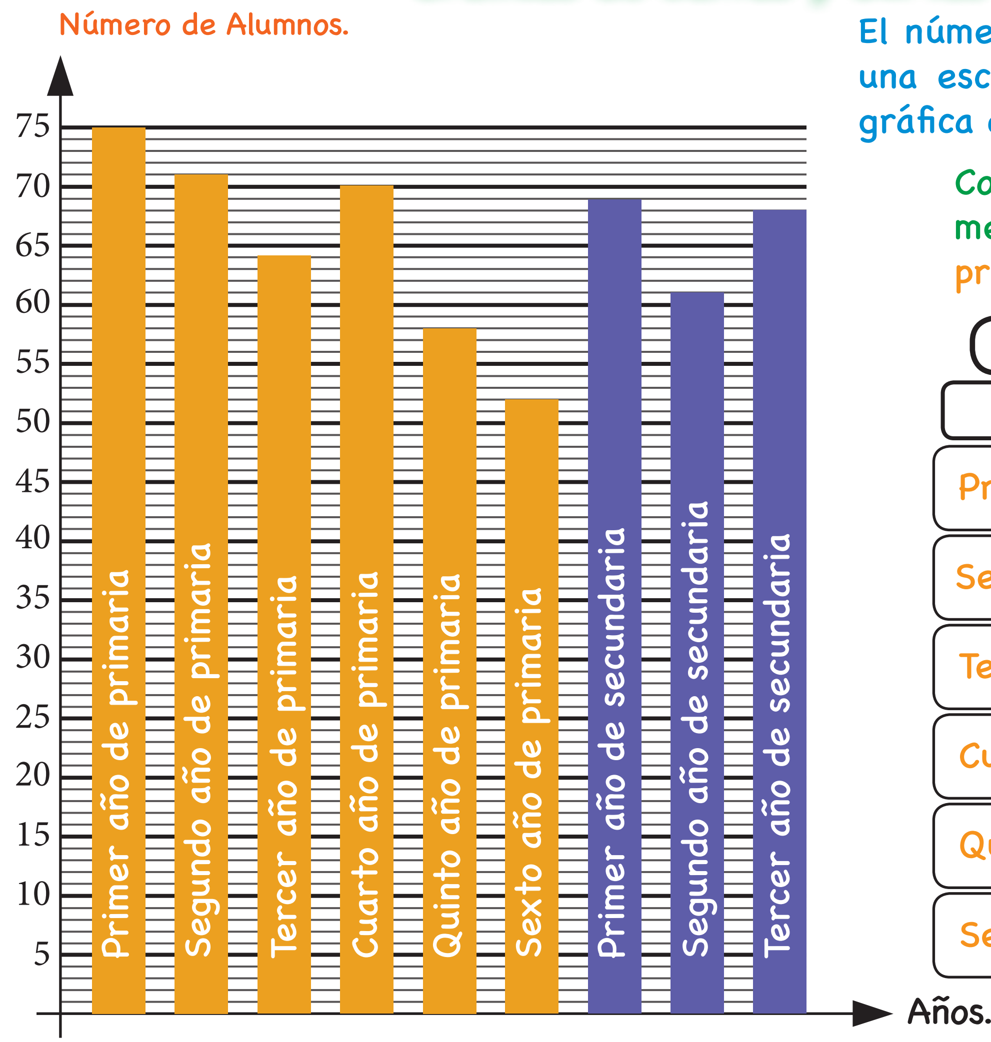


Gráfica de Barras y Curvas



Estadística

Gráficas de Barras y Curvas



El número total de alumnos de una escuela se muestra en la gráfica de barras.

Completa la tabla del número de alumnos en la primaria y la secundaria.

Primaria

Año	Número
Primero	
Segundo	
Tercero	
Cuarto	
Quinto	
Sexto	

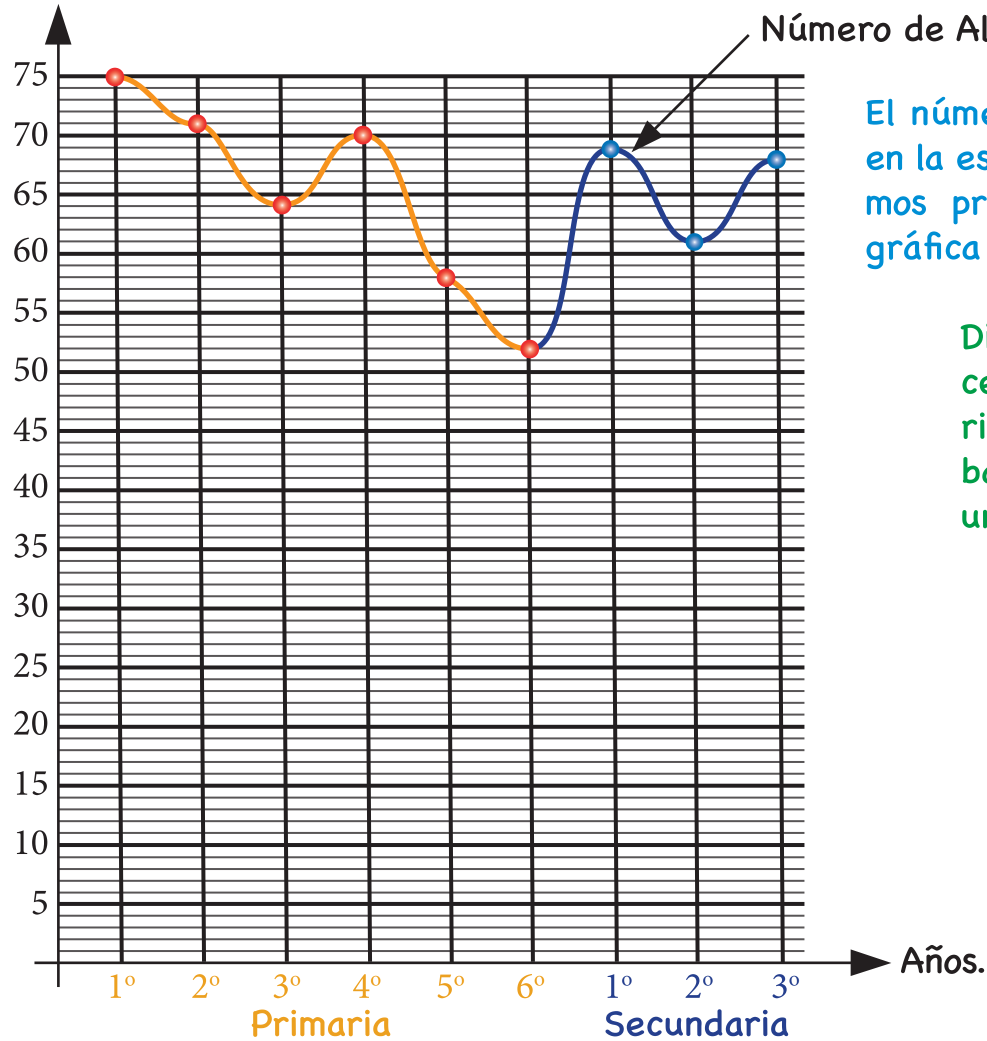
Secundaria

Año	Número
Primero	
Segundo	
Tercero	

Calcula el número total de alumnos que hay en la primaria y la secundaria.

Número Total de Alumnos en la Primaria	
Número Total de Alumnos en la Secundaria	

Número de Alumnos.



El número de alumnos que hay en la escuela, también lo podemos presentar utilizando una gráfica con una curva.

Dibujamos un punto en el centro de la parte superior de cada una de las barras, y los unimos con una curva.

Preguntas:

Si todos los grupos de primaria tuvieran el mismo número de alumnos.

1. ¿Cuántos alumnos tendría cada grupo de primaria?

Si todos los grupos de secundaria tuvieran el mismo número de alumnos.

2. ¿Cuántos alumnos tendría cada grupo de secundaria?

El número de niños que hay en cada grupo se muestra en la tabla.

3. ¿Cuántas niñas hay en cada grupo de primaria y secundaria?

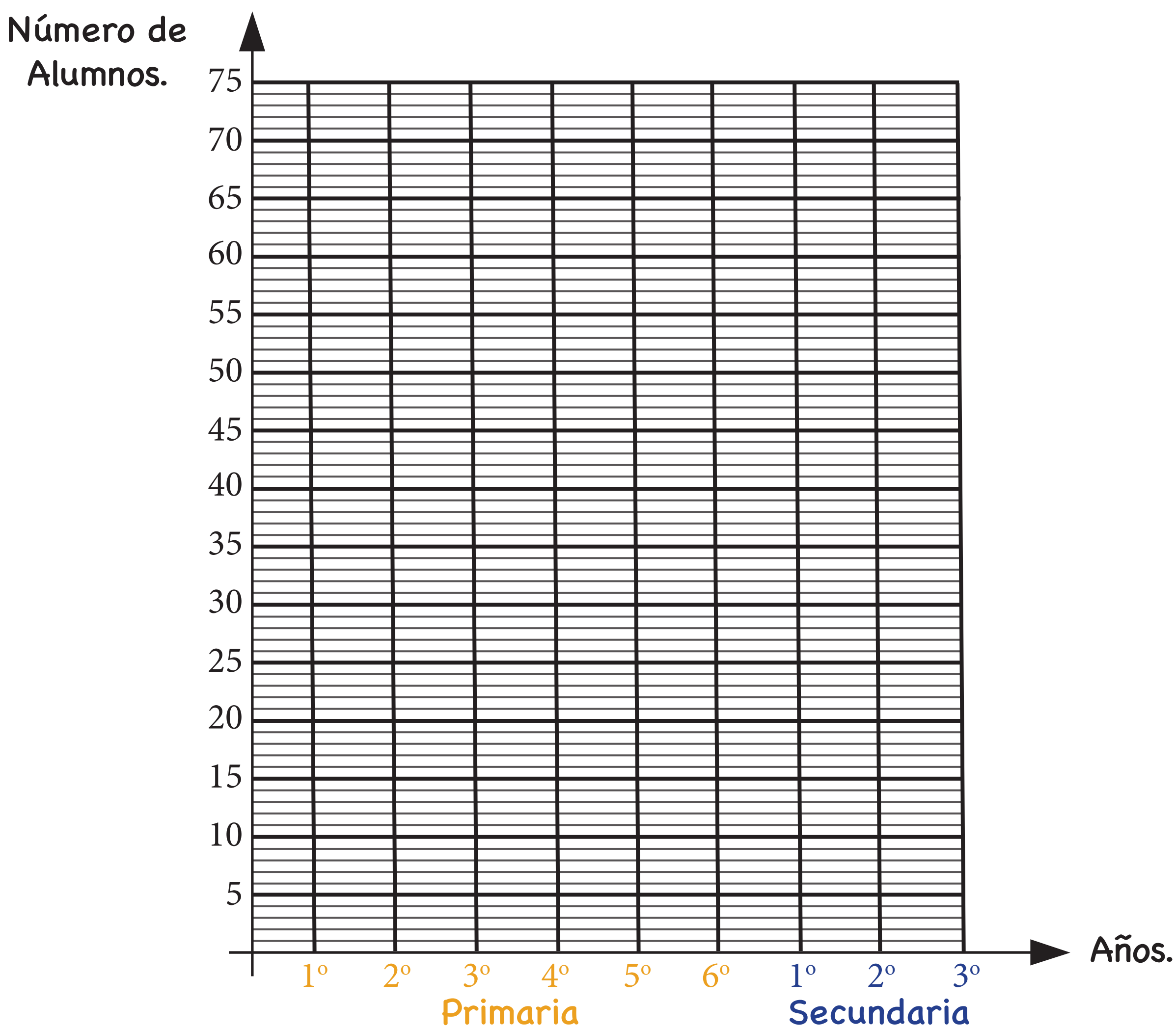
Primaria

Año	Número	Niños	Niñas
Primero		42	
Segundo		35	
Tercero		28	
Cuarto		38	
Quinto		33	
Sexto		29	

Secundaria

Año	Número	Niños	Niñas
Primero		30	
Segundo		41	
Tercero		37	

Representa utilizando una curva el número de niños y niñas que hay en cada grupo de la primaria y la secundaria.



Aritmética
Cuarto Año

mtk
Mathematiké

MORENO

Sistema Romano de Numeración

El sistema romano de numeración

Los números romanos fueron creados hace más de 20 siglos y sirvieron como base para crear otros sistemas numéricos, como es el caso del sistema de numeración decimal.

En la actualidad los utilizamos para describir fechas, hacer listados, clasificar volúmenes de enciclopedias, etcétera. Por lo tanto, es de gran valor cultural el que desarrollemos la habilidad para leer y escribir números en notación romana.

La numeración romana, es un sistema que no está estructurado usando columnas numéricas, por lo que hacer operaciones con estos números resulta muy complicado.

Símbolos utilizados en los números romanos

La notación romana cuenta con siete símbolos para escribir todos los números. Los símbolos y sus equivalencias en el sistema decimal son:

Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	⟶	1
V	⟶	5
X	⟶	10
L	⟶	50
C	⟶	100
D	⟶	500
M	⟶	1,000

Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

Usando estos trece símbolos, o sea los siete símbolos y los seis símbolos con una raya encima, creamos todo el universo numérico.

Estudia con detenimiento la siguiente tabla de equivalencias.

Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1
V	→	5
$\overline{V}$	→	5,000
X	→	10
$\overline{X}$	→	10,000
L	→	50
$\overline{L}$	→	50,000

Símbolo Romano		Valor Equivalente
C	→	100
$\overline{C}$	→	100,000
D	→	500
$\overline{D}$	→	500,000
M	→	1,000
$\overline{M}$	→	1,000,000

Procedimiento para escribir números romanos

El sistema de numeración romano no cuenta con el cero, ya que no es un sistema posicional, por lo cual para escribir números tenemos que sumar o restar los símbolos.

Para escribir números en notación romana, es necesario considerar las siguientes reglas:

1. Un mismo símbolo no puede repetirse más de tres veces.
2. Colocando símbolos iguales, excepto V, L, D, uno junto al otro, los sumamos.

I	→	1
II	→	1+1 = 2
III	→	1 + 1 + 1 = 3

X	→	10
XX	→	10 + 10 = 20
XXX	→	10 + 10 + 10 = 30

C	→	100
CC	→	100 + 100 = 200
CCC	→	100 + 100 + 100 = 300

M	→	1,000
MM	→	1,000 + 1,000 = 2,000
MMM	→	1,000 + 1,000 + 1,000 = 3,000

2. A los símbolos V, X, L, C, D, y M, los llamamos en este texto unidades básicas.
3. A los símbolos XX, XXX, CC, CCC, MM, y MMM, también los llamamos unidades básicas.

V	→	5
L	→	50
D	→	500

X	→	10
XX	→	20
XXX	→	30

C	→	100
CC	→	200
CCC	→	300

M	→	1,000
MM	→	2,000
MMM	→	3,000

4. Uno o varios símbolos de menor valor a una unidad básica colocados a su derecha suman su valor. El símbolo o símbolos colocados a la derecha pueden ser otra unidad básica de menor valor.

VI	→	5 + 1 = 6
VII	→	5 + 2 = 7
VIII	→	5 + 3 = 8

XI	→	10 + 1 = 11
XXV	→	20 + 5 = 25
XXVII	→	20 + 7 = 27
XXXVIII	→	30 + 8 = 38

LVII	→	50 + 7 = 57
LXV	→	50 + 15 = 65
LXXVI	→	50 + 26 = 76
LXXXIII	→	50 + 33 = 83

CII	→	100 + 2 = 102	DCLXXVI	→	500 + 176 = 676
CCLXXVIII	→	200 + 78 = 278	DCCXXXII	→	500 + 232 = 732
CCCLXXXII	→	300 + 82 = 382	DCCLXXVIII	→	500 + 278 = 778
CCCLXXVI	→	300 + 76 = 376	DCCCLXXXVI	→	500 + 386 = 886

MDCLXXXVII	→	1,000 + 687 = 1,687
MMDCCLXXVIII	→	2,000 + 778 = 2,778
MMMCCCXXXVI	→	3,000 + 336 = 3,336
MMMDCCCLXXXVIII	→	3,000 + 888 = 3,888

5. Un símbolo (solamente uno) de menor valor a una unidad básica colocado a su izquierda resta su valor.

IV	→	5 – 1 = 4	IX	→	10 – 1 = 9	XL	→	50 – 10 = 40
XC	→	100 – 10 = 90	CD	→	500 – 100 = 400	CM	→	1,000 – 100 = 900

6. Los números que creamos utilizando la regla anterior nos sirven para formar los números que llamaremos unidades auxiliares.

IV → 4		XL → 40		CD → 400	
IX → 9		XC → 90		CM → 900	

Ejemplo

Escribir los primeros 139 números romanos.

		10	X	20	XX	30	XXX	40	XL
1	I	11	XI	21	XXI	31	XXXI	41	XLI
2	II	12	XII	22	XXII	32	XXXII	42	XLII
3	III	13	XIII	23	XXIII	33	XXXIII	43	XLIII
4	IV	14	XIV	24	XXIV	34	XXXIV	44	XLIV
5	V	15	XV	25	XXV	35	XXXV	45	XLV
6	VI	16	XVI	26	XXVI	36	XXXVI	46	XLVI
7	VII	17	XVII	27	XXVII	37	XXXVII	47	XLVII
8	VIII	18	XVIII	28	XXVIII	38	XXXVIII	48	XLVIII
9	IX	19	XIX	29	XXIX	39	XXXIX	49	XLIX
50	L	60	LX	60	LX	70	LXX	80	LXXX
51	LI	61	LXI	61	LXI	71	LXXI	81	LXXXI
52	LII	62	LXII	62	LXII	72	LXXII	82	LXXXII
53	LIII	63	LXIII	63	LXIII	73	LXXIII	83	LXXXIII
54	LIV	64	LXIV	64	LXIV	74	LXXIV	84	LXXXIV
55	LV	65	LXV	65	LXV	75	LXXV	85	LXXXV
56	LVI	66	LXVI	66	LXVI	76	LXXVI	86	LXXXVI
57	LVII	67	LXVII	67	LXVII	77	LXXVII	87	LXXXVII
58	LVIII	68	LXVIII	68	LXVIII	78	LXXVIII	88	LXXXVIII
59	LIX	69	LXIX	69	LXIX	79	LXXIX	89	LXXXIX

90	XC	100	C	110	CX	120	CXX	130	CXXX
91	XCI	101	CI	111	CXI	121	CXXI	131	CXXXI
92	XCII	102	CII	112	CXII	122	CXXII	132	CXXXII
93	XCIII	103	CIII	113	CXIII	123	CXXIII	133	CXXXIII
94	XCIV	104	CIV	114	CXIV	124	CXXIV	134	CXXXIV
95	XCV	105	CV	115	CXV	125	CXXV	135	CXXXV
96	XCVI	106	CVI	116	CXVI	126	CXXVI	136	CXXXVI
97	XCVII	107	CVII	117	CXVII	127	CXXVII	137	CXXXVII
98	XCVIII	108	CVIII	118	CXVIII	128	CXXVIII	138	CXXXVIII
99	XCIX	109	CIX	119	CXIX	129	CXXIX	139	CXXXIX

Ejercicio

Escribe en el sistema romano de numeración los símbolos equivalentes.

	Símbolo Romano		Símbolo Romano
1		1,000	
5		5,000	
10		10,000	
50		50,000	
100		100,000	
500		500,000	
1,000		1,000,000	

Ejercicio

Escribe en notación romana las unidades básicas en rojo y las unidades auxiliares en color verde.

	Símbolo Romano		Símbolo Romano		Símbolo Romano
5		100		4	
50		200		9	
500		300		40	
10		1,000		90	
20		2,000		400	
30		3,000		900	

Ejercicio

Siguiendo lo lógica del sistema de notación romano, escribe los números equivalentes.

	Símbolo Romano		Símbolo Romano
5,000,000		100,000,000	
10,000,000		500,000,000	
50,000,000		1,000,000,000	

El sistema numérico decimal fue inventado por los matemáticos hindúes en los siglos V y VI. Los hindúes lo transmitieron a los árabes, quienes lo desarrollaron aún más. En el siglo XII, los árabes introdujeron este sistema en España. De España se difundió en todo Europa. En el siglo XVI, los europeos trajeron este sistema al continente americano. Por esta razón, a los números del sistema numérico decimal les llamamos números Indo-arábigos.

Ejercicio

Escribe en notación romana los números Indo-arábigos y en notación Indo-arábiga los números romanos.

680 =

LIII =

CCXXXVI =

1,220 =

459 =

CCCLXXIX =

LXVII =

727 =

CCCLVII =

139 =

682 =

1,599 =

CDXCVIII =

CCCXCIX =

DXLIII =

8,888 =

1,517 =

MMMCVIII =

MMCDLXXXVI =

9,999 =

3,832 =

CCCLXVII =

9,874 =

$\overline{V}$MDCCCXXIV =

MCLXXV =

7,634 =

2,010 =

9,479 =

$\overline{V}$MCMLII =

MMDCXL =

$\overline{V}$MMMDCCCLIII =

6,701 =

3,695 =

5,906 =

9,726 =

MMDCCXXIX =

CCLVIII =

M$\overline{V}$DCCCLXXII =

MMDCCCXV =

9,949 =

8,899 =

MMMDCCCLXXI =

$\overline{V}$DCCLXXXV =

Sistema Romano de Numeración

Característica del sistema romano de numeración

Los números romanos fueron creados hace más de 20 siglos y sirvieron como base para crear otros sistemas numéricos, como es el caso del sistema de numeración decimal.
En la actualidad los utilizamos para describir fechas, hacer listados, clasificar volúmenes de enciclopedias, etcétera.
Por lo tanto, es de gran valor cultural el que desarrollemos la habilidad para leer y escribir números en notación romana.
La numeración romana es un sistema que no está estructurado usando columnas numéricas, por lo que, hacer operaciones con estos números resulta muy complicado.

Símbolos utilizados en los números romanos

La notación romana cuenta con siete símbolos para escribir todos los números.
Colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.
Usando estos trece símbolos, o sea, los siete símbolos y los seis símbolos con una raya encima, creamos todo el universo numérico.

Símbolo Romano		Valor Equivalente
I	→	1
V	→	5
X	→	10
L	→	50
C	→	100
D	→	500
M	→	1,000

Símbolo Romano		Valor Equivalente
$\overline{V}$	→	5,000
$\overline{X}$	→	10,000
$\overline{L}$	→	50,000
$\overline{C}$	→	100,000
$\overline{D}$	→	500,000
$\overline{M}$	→	1,000,000

Procedimiento para escribir números romanos

El sistema de numeración romano no cuenta con el cero, ya que no es un sistema posicional, lo que hace que para escribir números tengamos que sumar o restar los símbolos.
Para escribir números en notación romana, es necesario considerar las siguientes reglas:

1. Un mismo símbolo no puede repetirse más de tres veces.
2. Colocando símbolos iguales, excepto V, L, D, uno junto al otro, los sumamos.
3. Solamente se pueden sumar hasta tres símbolos iguales.
4. Un símbolo de menor valor colocado a la derecha, suma su valor. Se pueden sumar hasta tres símbolos iguales a la derecha.
5. Un símbolo de menor valor colocado a la izquierda, resta su valor. Solamente se puede restar un símbolo a la izquierda.

I → 1
II → 1 + 1 = 2
III → 1 + 1 + 1 = 3

Un símbolo de menor valor a la izquierda se resta.

$\boxed{I}V$ → 5 – 1 = 4
V → 5
V$\boxed{I}$ → 5 + 1 = 6
V$\boxed{II}$ → 5 + 1 + 1 = 7
V$\boxed{III}$ → 5 + 1 + 1 + 1 = 8

Símbolos de menor valor a la derecha se suman.

Un símbolo de menor valor a la izquierda se resta.

$\boxed{I}X$ → 10 – 1 = 9
X → 10
X$\boxed{I}$ → 10 + 1 = 11
X$\boxed{II}$ → 10 + 1 + 1 = 12
X$\boxed{III}$ → 10 + 1 + 1 + 1 = 13

Símbolos de menor valor a la derecha se suman.

Ejemplo

Algunos ejemplos de cómo construir números romanos siguiendo las reglas enunciadas.

X$\boxed{\text{IV}}$	10 + 4 = 14	X$\boxed{\text{IX}}$	10 + 9 = 19	XX$\boxed{\text{IV}}$	20 + 4 = 24
XV	15	XX	20	XXV	25
XV$\boxed{\text{I}}$	15 + 1 = 16	XX$\boxed{\text{I}}$	20 + 1 = 21	XXV$\boxed{\text{I}}$	25 + 1 = 26
XV$\boxed{\text{II}}$	15 + 2 = 17	XX$\boxed{\text{II}}$	20 + 2 = 22	XXV$\boxed{\text{II}}$	25 + 2 = 27
XV$\boxed{\text{III}}$	15 + 3 = 18	XX$\boxed{\text{III}}$	20 + 3 = 23	XXV$\boxed{\text{III}}$	25 + 3 = 28
XX$\boxed{\text{IX}}$	20 + 9 = 29	XXX$\boxed{\text{IV}}$	30 + 4 = 34	XXX$\boxed{\text{IX}}$	30 + 9 = 39
XXX	30	XXXV	35	XL	40
XXX$\boxed{\text{I}}$	30 + 1 = 31	XXXV$\boxed{\text{I}}$	35 + 1 = 36	XL$\boxed{\text{I}}$	40 + 1 = 41
XXX$\boxed{\text{II}}$	30 + 2 = 32	XXXV$\boxed{\text{II}}$	35 + 2 = 37	XL$\boxed{\text{II}}$	40 + 2 = 42
XXX$\boxed{\text{III}}$	30 + 3 = 33	XXXV$\boxed{\text{III}}$	35 + 3 = 38	XL$\boxed{\text{III}}$	40 + 3 = 43
XL$\boxed{\text{IV}}$	40 + 4 = 44	XL$\boxed{\text{IX}}$	40 + 9 = 49	L$\boxed{\text{IV}}$	50 + 4 = 54
XLV	45	L	50	XLV	55
XLV$\boxed{\text{I}}$	45 + 1 = 46	L$\boxed{\text{I}}$	50 + 1 = 51	XLV$\boxed{\text{I}}$	55 + 1 = 56
XLV$\boxed{\text{II}}$	45 + 2 = 47	L$\boxed{\text{II}}$	50 + 2 = 52	XLV$\boxed{\text{II}}$	55 + 2 = 57
XLV$\boxed{\text{III}}$	45 + 3 = 48	L$\boxed{\text{III}}$	50 + 3 = 53	XLV$\boxed{\text{III}}$	55 + 3 = 58

Usando estas sencillas reglas podemos construir cualquier número entero.

LX	60	LXXXV	85	CCC	300	DCCC	800	MCCC	1,300	MMM	3,000
LXV	65	XC	90	CD	400	CM	900	MCD	1,400	MMMCC	3,200
LXX	70	XCV	95	D	500	M	1,000	MD	1,500	MMMCM	3,900
LXXV	75	C	100	DC	600	MC	1,100	MM	2,000	MMMCMXC	3,990
LXXX	80	CC	200	DCC	700	MCC	1,200	MMD	2,500	MMMCMXCIX	3,999

Para escribir números mayores a 3,999 usamos los símbolos con una raya encima.

Recordemos que colocar una raya encima de los símbolos romanos, excepto en el I, significa multiplicar por 1,000, es decir, aumentar 3 ceros.

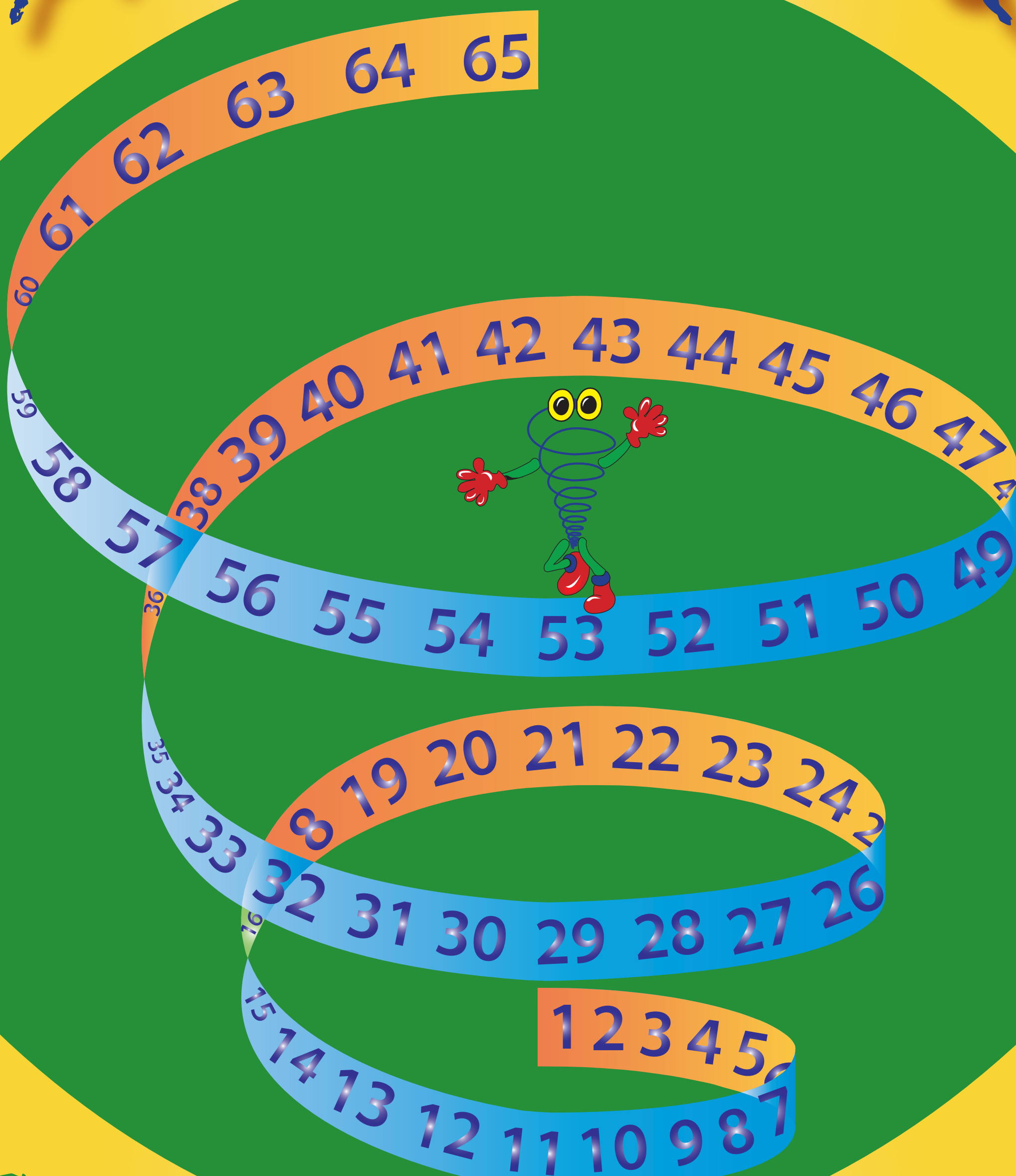
$\text{M}\overline{\text{V}}$	4,000	$\overline{\text{X}}\text{MMCCCXCIV}$	12,394	$\overline{\text{CCCLXXV}}\text{MMMCMLII}$	378,952
$\text{M}\overline{\text{V}}\text{DLXXXVII}$	4,587	$\overline{\text{XXV}}\text{MMMCCCLXXIX}$	28,379	$\overline{\text{CDL}}\text{MMMDCCXXVIII}$	453,728
$\text{M}\overline{\text{V}}\text{DCCXCVI}$	4,796	$\overline{\text{XL}}\text{M}\overline{\text{X}}\text{DCCCXCIV}$	49,894	$\overline{\text{DCCLXXX}}\text{M}\overline{\text{X}}\text{CDLXIII}$	789,463
$\overline{\text{V}}\text{MMMCMXLIX}$	8,949	$\overline{\text{LXXXV}}\text{MDXXXVIII}$	86,538	$\overline{\text{CMLXV}}\text{DCCVIII}$	965,708
$\text{M}\overline{\text{X}}\text{DCCCXXV}$	9,825	$\overline{\text{XC}}\text{M}\overline{\text{X}}\text{CMXCIX}$	99,999	$\overline{\text{CMXC}}\text{M}\overline{\text{X}}\text{CMXCIX}$	999,999

Serie de Ejercicios 1

Escribe en notación romana los números.

1.	1,652	**2.**	3,110	**3.**	2,780	**4.**	11	**5.**	991	**6.**	3,704
7.	982	**8.**	3,960	**9.**	3,218	**10.**	571	**11.**	3,565	**12.**	746
13.	2,937	**14.**	864	**15.**	2,057	**16.**	1,240	**17.**	2,297	**18.**	3,322
19.	3,078	**20.**	2,565	**21.**	2,417	**22.**	931	**23.**	3,716	**24.**	3,751
25.	6,501	**26.**	15,756	**27.**	9,120	**28.**	6,768	**29.**	21,252	**30.**	4,270

Aritmética



Quinto Año

La Espiral Ascendente del Conocimiento

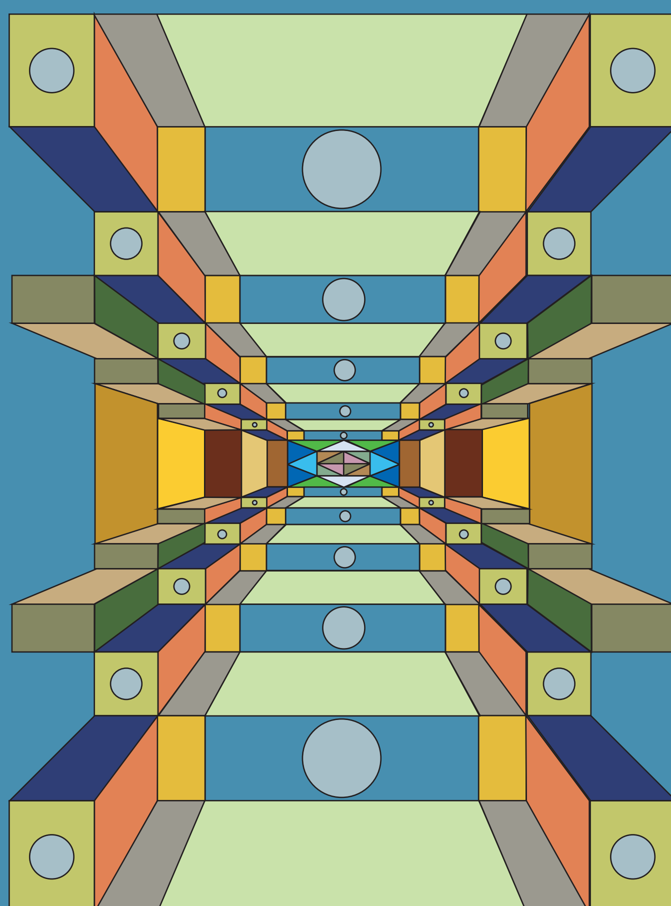
MORENO

Matemáticas

Integración del Conocimiento

Aritmético

Séptimo Nivel de Abstracción

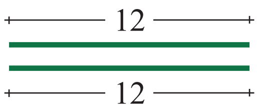


MORENO

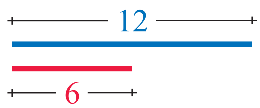
Proporciones

Concepto de rectas proporcionales

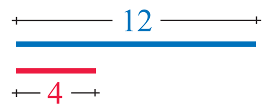
Dos rectas son iguales cuando tienen la misma longitud, y son proporcionales cuando tienen longitudes diferentes.



Rectas iguales



Rectas proporcionales



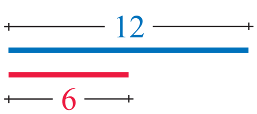
Rectas proporcionales

Constante de proporcionalidad

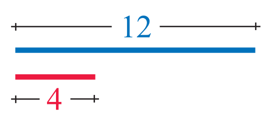
La constante de proporcionalidad es un número que puede ser entero o fraccionario, que indica la relación que las rectas guardan. A la constante de proporcionalidad le llamamos k.

La constante de proporcionalidad k se obtiene dividiendo la longitud de las rectas.

Si tomamos la recta que mide 12 y la que mide 6, decimos que la recta que mide 12 es el doble de la que mide 6. Si tomamos la recta que mide 12 y la que mide 4, decimos que la recta que mide 12 es el triple de la que mide 4. Encontramos las constantes de proporcionalidad, dividiendo la longitud de las rectas.

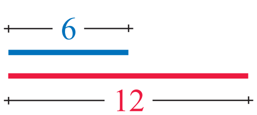


$\rightarrow \quad k = \frac{12}{6} = 2$

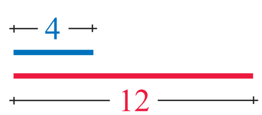


$\rightarrow \quad k = \frac{12}{4} = 3$

Ahora bien, también podemos establecer la proporcionalidad de la recta más pequeña a la más grande. La recta que mide 6 es la mitad de la que mide 12, y la que mide 4 es un tercio de la que mide 12. Encontramos las constantes de proporcionalidad, dividiendo la longitud de las rectas.



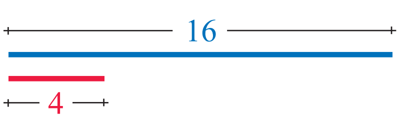
$\rightarrow \quad k = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$



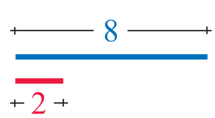
$\rightarrow \quad k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

Ejemplo

Encontrar la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas.



$\rightarrow \quad k = \frac{16}{4} = 4$



$\rightarrow \quad k = \frac{8}{2} = 4$

La constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es igual. La recta de 16 unidades tiene la misma proporción con la recta de 4 unidades, que la recta de 8 unidades tiene con la de 2 unidades.

$$k = \frac{16}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad k = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow \quad k = \frac{16}{4} = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow \quad \frac{16}{4} = \frac{8}{2}$$

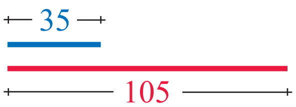
Para indicar que la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es la misma, decimos que 16 es a 4 como 8 es a 2.

como

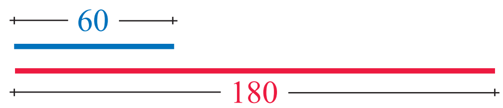
$$\text{es a}\ \frac{16}{4} = \frac{8}{2}\ \text{es a}$$

Ejemplo

Encontrar la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas. Si la constante de proporcionalidad es la misma, indicarlo.



$\rightarrow$ $k = \frac{35}{105} = \frac{1}{3}$



$\rightarrow$ $k = \frac{60}{180} = \frac{1}{3}$

La constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es la misma. La recta de 35 unidades tiene la misma proporción con la recta de 105 unidades, que la recta de 60 unidades tiene con la de 180 unidades.

$$k = \frac{35}{105} = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} \rightarrow k = \frac{35}{105} = \frac{60}{180} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{35}{105} = \frac{60}{180}$$

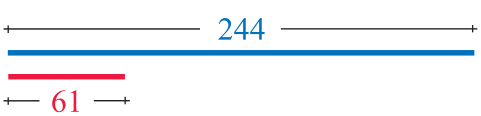
Para indicar que la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es la misma, decimos que 35 es a 105 como 60 es a 180.

como

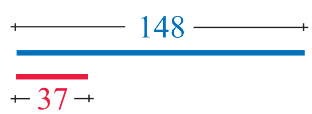
$$\text{es a}\ \frac{35}{105} = \frac{60}{180}\ \text{es a}$$

Ejercicio

Encuentra la constante de proporcionalidad, de los dos pares de rectas. Si la constante de proporcionalidad es la misma, indícalo.



$k = \frac{}{} =$



$k = \frac{}{} =$

Indica la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas.

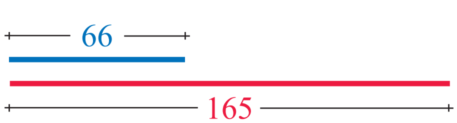
$$k = \frac{}{} = \rightarrow k = \frac{}{} = \rightarrow k = \frac{}{} = \frac{}{} = \rightarrow \frac{}{} = \frac{}{}$$

Para indicar que la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es la misma, decimos que:

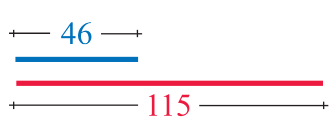
$$\frac{}{} = \frac{}{}$$

Ejercicio

Encuentra la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas. Si la constante de proporcionalidad es la misma, indícalo.



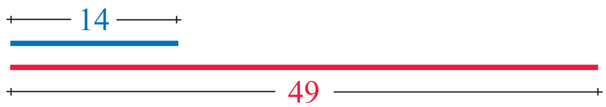
$k = \frac{}{} =$



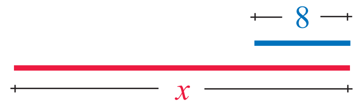
$k = \frac{}{} =$

Ejemplo

El valor de la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es el mismo, determinar la longitud desconocida x de la recta.



$k = \frac{14}{49} = \frac{2}{7}$



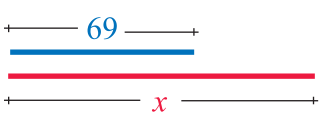
$k = \frac{8}{x} = \frac{2}{7}$

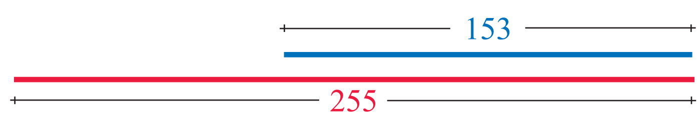
$$k = \frac{14}{49} = \frac{2}{7} \longrightarrow k = \frac{8}{x} = \frac{2}{7} \longrightarrow k = \frac{14}{49} = \frac{8}{x} = \frac{2}{7} \longrightarrow \frac{14}{49} = \frac{8}{x}$$

El valor desconocido x, se encuentra en el denominador de la segunda fracción. Para que sea más fácil aplicar la propiedad, escribimos del lado izquierdo de la igualdad la fracción que contiene a la x.	$\frac{14}{49} = \frac{8}{x} \longrightarrow \frac{8}{x} = \frac{14}{49}$
Para hacer aún más fácil el aplicar la propiedad, invertimos la proporción de las rectas, es decir, la hacemos de la recta más grande a la más pequeña.	$\frac{14}{49} = \frac{8}{x} \longrightarrow \frac{8}{x} = \frac{14}{49} \longrightarrow \frac{x}{8} = \frac{49}{14}$
Para obtener el valor de x, aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación. Pasamos el 8 al otro lado de la igualdad multiplicando a la fracción.	$\frac{x}{8} = \frac{49}{14} \longrightarrow x = \frac{49}{14} \times 8 \longrightarrow x = \frac{49 \times 8}{14}$
Simplificamos la multiplicación, y obtenemos el valor de x.	$x = \frac{49 \times 8}{14} \longrightarrow x = \frac{7 \times 8}{2} = 7 \times 4 \longrightarrow x = 28$

Ejercicio

El valor de la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es el mismo, encuentra la longitud desconocida x de la recta.





$$k = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \longrightarrow k = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \longrightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Para que sea más fácil aplicar la propiedad de división como operación inversa de la multiplicación, plantea la igualdad de tal forma que el valor desconocido x se encuentre en el numerador.	$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \longrightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

Para encontrar el valor de x, aplica la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación. $\frac{x}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \longrightarrow x = \frac{\quad}{\quad} \times \quad \longrightarrow x = \frac{\quad \times \quad}{\quad}$
Para encontrar el valor de x, aplica la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación. $\frac{x}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \longrightarrow x = \frac{\quad}{\quad} \times \quad \longrightarrow x = \frac{\quad \times \quad}{\quad}$

Razón

Concepto de razón

Una razón es una proporción especial ya que el denominador de la proporción siempre es 1.

Las razones las utilizamos con tanta frecuencia, que usamos la palabra por, para establecer la proporción.

Kilómetros por hora, quiere decir el número de kilómetros que recorremos en 1 hora.

$$\text{Kilómetros por hora} \longrightarrow \frac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 hora}} \longrightarrow km/hr$$

Vueltas por minuto, quiere decir el número de vueltas que damos en 1 minuto.

$$\text{Vueltas por minuto} \longrightarrow \frac{\text{Número de vueltas}}{\text{1 minuto}} \longrightarrow \textit{vueltas/min}$$

Pasajeros por avión, quiere decir el número de pasajeros que viajan en 1 avión.

$$\text{Pasajeros por avión} \longrightarrow \frac{\text{Número de pasajeros}}{\text{1 avión}} \longrightarrow \textit{pasajeros/avión}$$

Kilómetros por litro, quiere decir el número de kilómetros que recorremos con 1 litro.

$$\text{Kilómetros por litro} \longrightarrow \frac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 litro}} \longrightarrow km/l$$

Es muy sencillo resolver problemas que involucran razones. Utilizamos la regla de tres para hacerlo.

Ejemplo

Un carro compacto recorre 18 kilómetros por litro de gasolina. ¿Cuántos litros de gasolina se requieren para recorrer 144 kilómetros?

Escribimos los datos que conocemos. Le llamamos x a la cantidad que desconocemos.	$\frac{\text{18 kilómetros}}{\text{1 litro}}$ $\quad$ $\frac{\text{144 kilómetros}}{x \text{ litros}}$
La constante de proporcionalidad es la misma para las dos proporciones, por lo cual, las igualamos.	$\frac{18\ km}{1\ l} = \frac{144\ km}{x\ l}$
Escribimos la igualdad en la forma que más nos conviene para aplicar la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.	$\frac{18\ km}{1\ l} = \frac{144\ km}{x\ l} \longrightarrow \frac{144\ km}{x\ l} = \frac{18\ km}{1\ l} \longrightarrow \frac{x\ l}{144\ km} = \frac{1\ l}{18\ km}$

Para conocer el valor de x aplicamos la propiedad. En un carro cuyo rendimiento es 18 *km/l*, para recorrer 144 *km* requerimos de 8 *litros* de gasolina.	$\frac{x}{144} = \frac{1}{18} \rightarrow x = \frac{1}{18} \times 144 \rightarrow x = \frac{1 \times 144}{18} \rightarrow x = 8 \; litros$

Ejemplo

Una escuela tiene una capacidad de acomodar 36 alumnos por salón. Este año escolar admitieron 684 alumnos, ¿cuántos salones de clase necesitan?

Resolver problemas de razones es tan sencillo, que podemos directamente, plantear las igualdades. Llamando x a la cantidad que deseamos conocer.	$\frac{36 \; alumnos}{1 \; salón} = \frac{684 \; alumnos}{x \; salones}$
Escribimos la igualdad dejando x en el numerador de la fracción izquierda.	$\frac{36}{1} = \frac{684}{x} \rightarrow \frac{684}{x} = \frac{36}{1} \rightarrow \frac{x}{684} = \frac{1}{36}$

Para conocer el valor de x aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.
En una escuela con capacidad de 36 *alumnos/salón* se requieren 19 *salones* para acomodar a 984 *alumnos*.

$$\frac{x}{684} = \frac{1}{36} \rightarrow x = \frac{1}{36} \times 684 \rightarrow x = \frac{1 \times 684}{36} \rightarrow x = 19 \; salones$$

Ejercicio

Un grupo de alumnos hacen un viaje de estudio a lugares arqueológicos. El promedio de velocidad a la que viajan es 67 *km/hr*. Recorrieron 1,005 *km*. ¿Cuántas horas viajaron en carro?

Escribe la igualdad llamando x a la cantidad que deseas conocer.

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Escribe la igualdad dejando x en el numerador de la fracción izquierda.

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \rightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \rightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

Aplica la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para conocer el valor de x. No escribas las unidades para que las operaciones sean más sencillas.

$$\frac{x}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} \rightarrow x = \frac{\quad}{\quad} \times \quad \rightarrow x = \frac{\quad \times \quad}{\quad} \rightarrow x =$$

Explica con palabras el resultado.

Ejercicio

En una feria de juegos mecánicos la rueda de la fortuna da 4 vueltas por minuto. La persona que paga un boleto da 48 vueltas. ¿Cuántos minutos una persona viaja si paga un boleto?

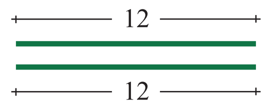
Escribe la igualdad llamando x a la cantidad que deseas conocer.

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$$

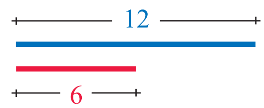
Proporciones

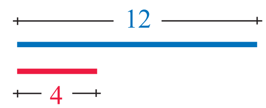
Concepto de rectas proporcionales

Dos rectas son iguales cuando tienen la misma longitud.



Dos rectas son proporcionales cuando tienen longitudes diferentes.

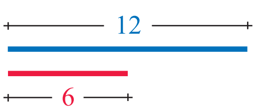




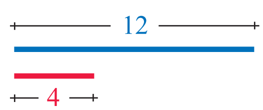
Constante de proporcionalidad

La constante de proporcionalidad es un número que puede ser entero o fraccionario, que indica la relación que las rectas tienen. A la constante de proporcionalidad le llamamos k. La constante de proporcionalidad k se obtiene dividiendo la longitud de las rectas.

Si tomamos la recta que mide 12 y la que mide 6, decimos que la recta que mide 12 es el doble de la que mide 6. Si tomamos la recta que mide 12 y la que mide 4, decimos que la recta que mide 12 es el triple de la que mide 4. Encontramos las constantes de proporcionalidad, dividiendo la longitud de las rectas.



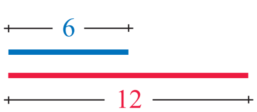
$\longrightarrow \quad k = \dfrac{12}{6} = 2$



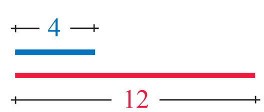
$\longrightarrow \quad k = \dfrac{12}{4} = 3$

Ahora bien, también podemos establecer la proporcionalidad de la recta más pequeña a la más grande. La recta que mide 6 es la mitad de la que mide 12, y la que mide 4 es un tercio de la que mide 12.

Encontramos las constantes de proporcionalidad, dividiendo la longitud de las rectas.



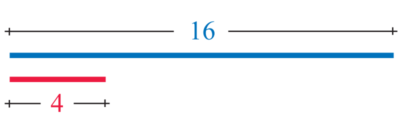
$\longrightarrow \quad k = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$



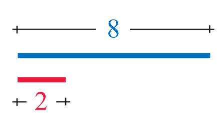
$\longrightarrow \quad k = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$

Ejemplo

Encontrar la constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas.



$\longrightarrow \quad k = \dfrac{16}{4} = 4$



$\longrightarrow \quad k = \dfrac{8}{2} = 4$

La constante de proporcionalidad de los dos pares de rectas es igual.

La recta de 16 unidades tiene la misma proporción con la recta de 4 unidades, que la recta de 8 unidades tiene con la de 2 unidades.

$$k = \frac{16}{4} = 4 \quad \longrightarrow \quad k = \frac{8}{2} = 4 \quad \longrightarrow \quad k = \frac{16}{4} = \frac{8}{2} = 4 \quad \longrightarrow \quad \frac{16}{4} = \frac{8}{2} = 4$$

Serie de Ejercicios 3

La recta l_1 es proporcional a la recta l_2 y la recta l_3 es proporcional a la recta l_4. Los dos pares de rectas tienen la misma constante de proporcionalidad k. Determina el valor de la constante de proporcionalidad k y la longitud de la recta desconocida x.

1. $l_1 = 69$, $l_2 = x$; $l_3 = 153$, $l_4 = 255$

2. $l_1 = 132$, $l_2 = 297$; $l_3 = 72$, $l_4 = x$

3. $l_1 = 45$, $l_2 = 135$; $l_3 = 75$, $l_4 = x$

4. $l_1 = 96$, $l_2 = 72$; $l_3 = 124$, $l_4 = x$

5. $l_1 = 84$, $l_2 = x$; $l_3 = 91$, $l_4 = 52$

6. $l_1 = 12$, $l_2 = 60$; $l_3 = 14$, $l_4 = x$

7. $l_1 = 99$, $l_2 = 77$; $l_3 = 81$, $l_4 = x$

8. $l_1 = 45$, $l_2 = 60$; $l_3 = 36$, $l_4 = x$

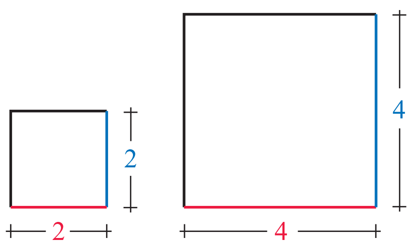
9. $l_1 = 65$, $l_2 = 26$; $l_3 = 80$, $l_4 = x$

10. $l_1 = 98$, $l_2 = 84$; $l_3 = 105$, $l_4 = x$

Figuras geométricas proporcionales o semejantes

Dos figuras geométricas son proporcionales o semejantes cuando todos sus lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad, es decir, cuando su constante de proporcionalidad k es la misma.

Por lo tanto, para saber si dos figuras geométricas son semejantes debemos verificar que la constante de proporcionalidad de todos sus lados equivalentes sea la misma.

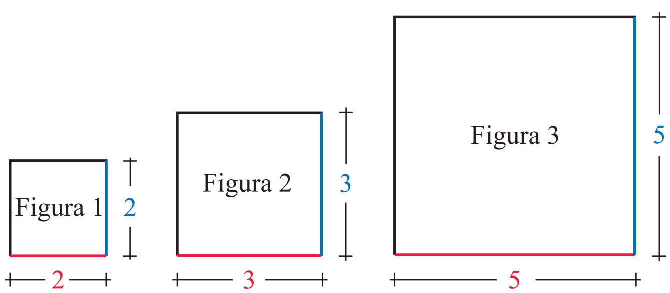


$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} \longrightarrow k = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo

Verificar si los siguientes tres cuadrados son semejantes.



$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

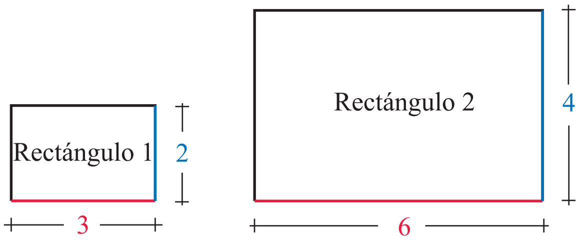
$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 3}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 3}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{5}{3} = \frac{5}{3}$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 3}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 3}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} \longrightarrow k = \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

El cuadrado 1 es proporcional al cuadrado 2 ya que el lado 1 y el lado 2 de ambas figuras son proporcionales. El cuadrado 3 es proporcional al cuadrado 2 porque el lado 1 y el lado 2 de ambos cuadrados son proporcionales.

Finalmente, el cuadrado 3 también es proporcional al cuadrado 1 ya que el lado 1 y el lado 2 de ambas figuras son proporcionales. Por lo tanto, los tres cuadrados son proporcionales o semejantes.
De hecho todos los cuadrados son semejantes, ya que todos sus lados correspondientes siempre son proporcionales.

Rectángulos



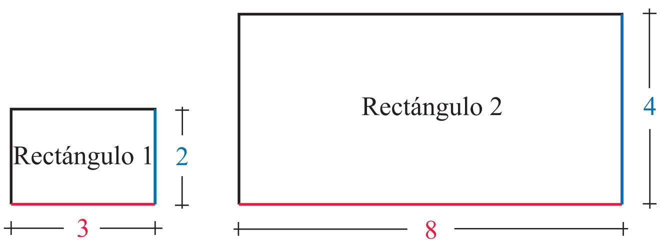
$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} \longrightarrow k = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

Los dos rectángulos son semejantes o proporcionales, ya que sus lados correspondientes tienen la misma constante k de proporcionalidad.

Ejemplo

Verificar si los rectángulos son semejantes.



$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} \neq \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{8}$$

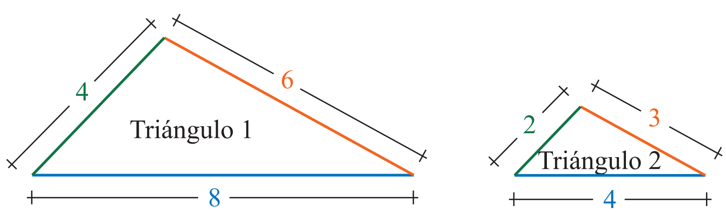
$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} \neq \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} \longrightarrow k = \frac{4}{2} \neq \frac{8}{3}$$

El rectángulo 1 no es semejante al rectángulo 2 ya que la constante de proporcionalidad del lado 1 de ambos rectángulos es diferente de la constante de proporcionalidad del lado 2 Es claro que no todos los rectángulos son semejantes.

Triángulos

Dos triángulos son semejantes o proporcionales si son iguales en su forma, es decir, son homogéneos aunque diferentes de tamaño.
Por lo cual, dos triángulos son semejantes o proporcionales cuando los tres pares de lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad k.

Los triángulos semejantes o proporcionales son muy importantes, ya que se utilizan en muchas demostraciones geométricas.



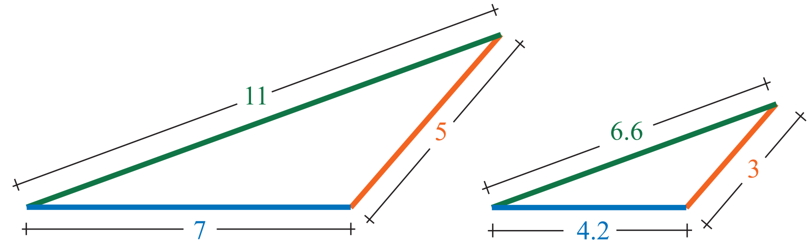
$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Figura 2}}} \longrightarrow k = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 3_{\text{Figura 1}}} \longrightarrow k = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Verificar que los triángulos son semejantes o proporcionales.

Para demostrar que los triángulos son semejantes, es necesario verificar que los tres lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad. Podemos tomar como triángulo 1 a cualquiera de los dos.



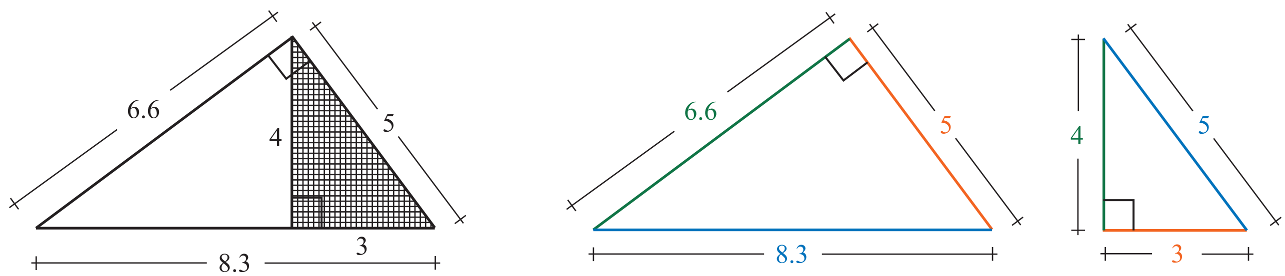
$$k_1 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{4.2}{7} = 0.6 \longrightarrow k_2 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{3}{5} = 0.6 \longrightarrow k_3 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{6.6}{11} = 0.6$$

$$k_1 = k_2 = k_3 \longrightarrow k = 0.6$$

Los dos triángulos son semejantes.

Ejemplo

Demostrar que el triángulo 5, 6.6, 8.3 es semejante al triángulo 3, 4, 5.



$$k_1 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{8.3}{5} = 1.66 \longrightarrow k_2 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{5}{3} = 1.66 \longrightarrow k_3 = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{6.6}{4} = 1.66$$

$$k_1 = k_2 = k_3 \longrightarrow k = 1.66$$

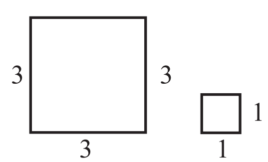
Utilizamos el ángulo recto de ambos triángulos para localizar los lados correspondientes.

Demostramos que para los tres lados la constante de proporcionalidad es la misma, por lo tanto, los triángulos son semejantes.

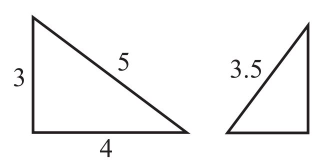
Serie de Ejercicios 4

Calcula la constante de proporcionalidad y la longitud de los lados desconocidos.

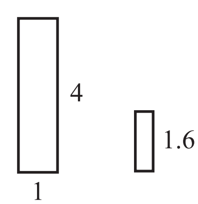
1.



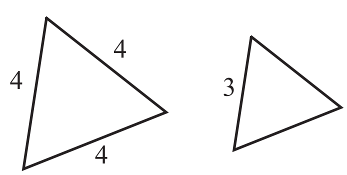
2.



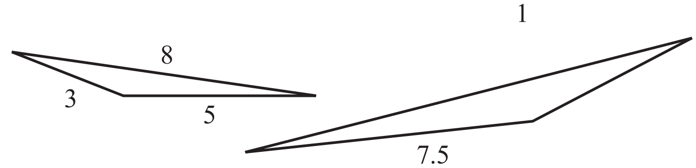
3.



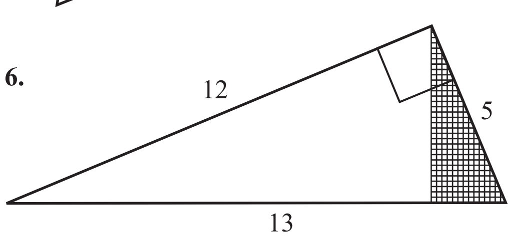
4.



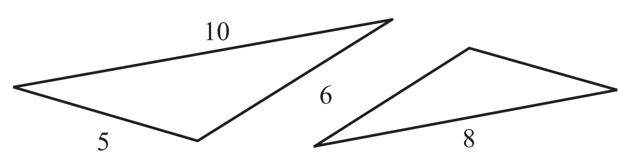
5.



6.



7.



Regla de tres

Concepto de regla de tres

Cuando dos pares de rectas guardan la misma proporción y desconocemos la longitud de una de ellas, a la que indicamos con la letra x, le llamamos regla de tres, ya que de las cuatro longitudes solamente conocemos tres.

La regla de tres también la podemos utilizar para resolver problemas que no son rectas. La única condición es que se trate de dos pares de proporciones, cuya constante de proporcionalidad es la misma.

Como pudimos observar en los ejemplos anteriores, no necesitamos conocer el valor de la constante de proporcionalidad, lo único que importa es establecer que la constante es la misma.

Ejemplo

Pintamos 120 metros cuadrados con 10 litros de pintura. ¿Cuántos metros cuadrados más podremos pintar, si solamente nos quedan 7 litros de pintura?

Para entender mejor el problema, primero escribimos los datos que conocemos, y le llamamos x a la cantidad que desconocemos.

$$120\ m^2 \text{ se pintan con } 10\ l$$
$$x\ m^2 \text{ se pintan con } 7\ l$$

La proporción es metros cuadrados a litros, por lo cual, escribimos esta relación como lo hicimos en el caso de las rectas.

Primera proporción

$$\frac{120\ m^2}{10\ l}$$

Segunda proporción

$$\frac{x\ m^2}{7\ l}$$

La constante de proporcionalidad es la misma para ambas proporciones, por lo cual, las igualamos.
Como lo hicimos en el caso de las rectas, decimos que $120\ m^2$ es $10\ l$, como $x\ m^2$ es $7\ l$.

$$\text{es a}\ \frac{120\ m^2}{10\ l} \overset{\text{como}}{=} \frac{x\ m^2}{7\ l}\ \text{es a}$$

Para hacer más sencillo aplicar la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación, escribimos del lado izquierdo de la igualdad la fracción que contiene a la incógnita x.

$$\frac{120\ m^2}{10\ l} = \frac{x\ m^2}{7\ l} \longrightarrow \frac{x\ m^2}{7\ l} = \frac{120\ m^2}{10\ l} \longrightarrow x = \frac{120}{10} \times 7 \longrightarrow x = \frac{120 \times 7}{10}$$

Resolvemos la fracción y obtenemos el valor de la incógnita x.
Con $10\ l$ pintamos $120\ m^2$, con $7\ l$ podremos pintar $84\ m^2$.

$$\frac{120\ m^2}{10\ l} = \frac{x\ m^2}{7\ l} \longrightarrow x = \frac{12 \times 7}{1} \longrightarrow x = 84\ m^2$$

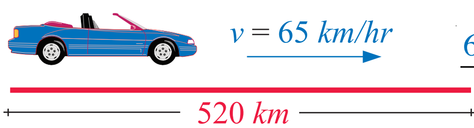
Resolvemos la fracción para obtener el valor de la incógnita x. 6 carpinteros construyen 22 m de cerca, 9 carpinteros construyen 33 m.	$x = \frac{22 \times 9}{6} \rightarrow x = \frac{11 \times 3}{1} \rightarrow x = 33\ m$

Ejemplo

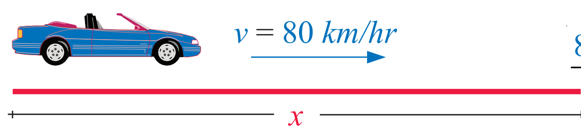
Viajando a una velocidad promedio de 65 km/hr en un día recorremos una distancia de 520 km. Si viajamos a una velocidad promedio de 80 km/hr, ¿qué distancia recorremos en un día?

Para entender mejor el problema, primero escribimos los datos que conocemos y le llamamos x a la cantidad que desconocemos.	A 65 km/hr recorremos una distancia de 520 km A 80 km/hr recorremos una distancia de x km

La proporción es km/hr a km, por lo cual, escribimos esta relación.



$$\frac{65\ km/hr}{520\ km}$$

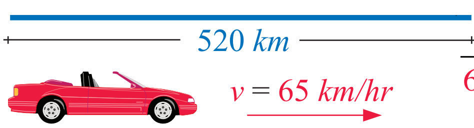


$$\frac{80\ km/hr}{x\ km}$$

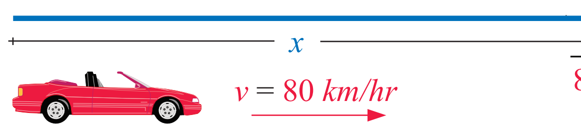
La constante de proporcionalidad es la misma para ambas proporciones, por lo cual, las igualamos. Como lo hicimos en el caso de las rectas y en los problemas anteriores, decimos que 65 km/hr es 520 km, como 80 km/hr es x km.	como es a $\frac{65\ km/hr}{520\ km} = \frac{80\ km/hr}{x\ km}$ es a

Recordemos que las proporciones también las podemos establecer poniendo en el numerador la distancia recorrida y en el denominador la velocidad a la que viajamos. La constante de proporcionalidad también es la misma para ambas proporciones.

Lo que es importante es guardar siempre la misma relación en las dos proporciones, es decir, de velocidad a distancia o de distancia a velocidad.



$$\frac{520\ km}{65\ km/hr}$$



$$\frac{x\ km}{80\ km/hr}$$

En esta segunda forma de plantear las proporciones, decimos que 520 km es a 65 km/hr, como x km es a 80 km/hr.	como es a $\frac{520\ km}{65\ km/hr} = \frac{x\ km}{80\ km/hr}$ es a
Hay cuatro formas equivalentes en las cuales podemos plantear las proporciones.	$\frac{65\ km/hr}{520\ km} = \frac{80\ km/hr}{x\ km} \rightarrow \frac{80\ km/hr}{x\ km} = \frac{65\ km/hr}{520\ km}$ $\frac{520\ km}{65\ km/hr} = \frac{x\ km}{80\ km/hr} \rightarrow \frac{x\ km}{80\ km/hr} = \frac{520\ km}{65\ km/hr}$
Escogemos la cuarta forma de plantear las proporciones. Aplicamos la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación.	$\frac{x\ km}{80\ km/hr} = \frac{520\ km}{65\ km/hr} \rightarrow x = \frac{520}{65} \times 80 \rightarrow x = \frac{520 \times 80}{65}$
Resolvemos la fracción para obtener el valor de la incógnita x. Viajando a la velocidad de 65 km/hr recorremos 520 km, viajando a 80 km/hr recorremos 640 km.	$x = \frac{520 \times 80}{65} \rightarrow x = \frac{40 \times 16}{1} \rightarrow x = 640\ km$

Ejercicio

En una panadería por 204 *kg* de harina pagaron $4,692. Si compran 250 *kg* de harina, ¿cuánto deberán pagar?

Escribe los datos que conocemos.

Haz un dibujo que ilustre las proporciones. Escribe las proporciones y la igualdad.

como

es a ________ = ________ es a

Escribe las cuatro formas en las cuales puede ser expresada la igualdad de las proporciones.

$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \rightarrow \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

$\_\_\_\_ = \_\_\_\_ \rightarrow \_\_\_\_ = \_\_\_\_$

Escoge una de las cuatro igualdades. Utiliza la propiedad de la división como operación inversa de la multiplicación para calcular el valor de *x*.

$\frac{x}{\_\_\_\_} = \_\_\_\_ \rightarrow x = \_\_\_\_ \times \rightarrow x = \frac{\times}{\_\_\_\_}$

Resuelve las operaciones de la fracción y obtén el valor de *x*.

$x = \frac{\times}{\_\_\_\_} \rightarrow x = \frac{\times}{\_\_\_\_} \rightarrow x = \$$

Describe con palabras las proporciones como lo hicimos en los ejemplos anteriores.

Serie de Ejercicios 5

Resolver los problemas. En algunos casos es conveniente hacer un dibujo para mejor entender los datos que nos proporcionan y lo que nos preguntan.

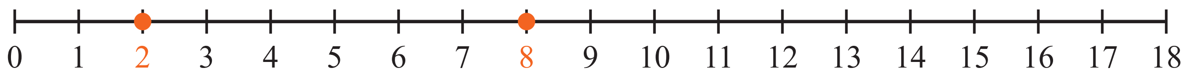
1. Con $430 compramos 26 metros de tela, ¿cuánto dinero necesitamos para comprar 62 metros?
2. ¿Cuánto litros de gasolina necesitamos para viajar 545 kilómetros, si el vehículo recorre 11 kilómetros por litro?
3. Con 172 horas de trabajo es posible cercar un terreno de 63 metros de perímetro, si trabajamos 300 horas, ¿cuántos metros podemos cercar?
4. Para hacer 368 bolillos necesitamos 125 gramos de levadura. Si sólo queremos producir 132 bolillos, ¿cuántos gramos de levadura requerimos?
5. En un mapa de la ciudad 1 centímetro representa 800 metros. ¿Cuál es la distancia entre dos colonias que se encuentran a 3.8 centímetros?
6. Juan corre 1,700 metros en 21 minutos. Si mantiene este paso, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 2.5 kilómetros?
7. En el supermercado anuncian que la bolsa con 4 kilogramos de manzanas cuesta $21.50. ¿Cuánto cuesta una bolsa que pesa 3.2 kilogramos?
8. En una escuela de educación especial necesitan al menos 3 maestros por cada 40 alumnos. Si cuentan con 8 maestros, ¿cuántos alumnos pueden admitir?
9. En una línea de producción, 14 trabajadores ensamblan 124 radios por hora. Si queremos producir 160 radios por hora, ¿cuántos trabajadores se requieren?
10. El departamento de idiomas de la universidad reportó que por cada 5 estudiantes, 2 se inscriben para estudiar alemán y 3 inglés. Si la universidad admite 210 alumnos, ¿cuántos se inscribirán en alemán y cuántos en inglés?
11. En el equipo de atletismo de la escuela hay 4 niñas por cada 7 niños. Si el equipo cuenta con 143 competidores, ¿cuántos niños hay?
12. Una fotografía mide 12 centímetros de ancho y 18 centímetros de alto. Si ampliamos el ancho a 16 centímetros, ¿cuánto debemos ampliar el alto para guardar la misma proporción?
13. Una compañía de transportación cobra una tarifa proporcional al peso. Enviamos un paquete de 122.4 kilogramos y nos cobran $322.70. Si enviamos un paquete que pesa 173.20 kilogramos, ¿cuánto debemos pagar?
14. Un frasco de vitaminas con 280 pastillas cuesta $72.50, ¿cuánto cuesta un frasco que tiene 220 pastillas?
15. En una fábrica de dulces necesitan 73.25 kilogramos de azúcar para elaborar 1,328 caramelos. Si la producción se incrementa a 1,642 caramelos, ¿cuántos kilogramos de azúcar necesitan?
16. Alicia quiere comprar un carro cuyo precio de lista es de $35,128.00, pero incluyendo el impuesto cuesta $39,079.90. Si escogiera un automóvil que tiene como precio de lista $43,530.00 y la tasa de impuesto es la misma, ¿cuál es el precio incluyendo el impuesto?
17. De cada 7 alumnos que hay en una escuela, 3 son menores de 10 años. Si en la escuela hay 805 alumnos, ¿cuántos son mayores de 10 años?
18. Entre 9 amigos lograron mover una viga de concreto de 261 kilogramos. ¿A cuántos amigos más deben invitar si quieren mover una viga de 319 kilogramos?
19. En una encuesta que hizo una fábrica de pasteles sobre la preferencia de sabores, encontraron que 7 de cada 9 personas prefieren el pastel de chocolate sobre el de vainilla. Si 328 personas votaron por el pastel de vainilla, ¿cuántas personas prefirieron el de chocolate?
20. A las 3:00 pm, un árbol de 8.2 metros de altura proyecta una sombra de 11.6 metros. A la misma hora, ¿que sombra proyecta un árbol de 12.5 metros de altura?
21. Cecilia sale de vacaciones un fin de semana con su familia. En su diario anota las distancias que recorren. El sábado manejaron 264 kilómetros en 3 horas con 12 minutos y el domingo 176 kilómetros. Si manejaron la misma proporción de kilómetros por hora los dos días, ¿cuánto tiempo manejaron el domingo?
22. Para preparar 22.5 litros de agua de limón utilizamos 3.4 kilogramos de limones. ¿Cuántos kilogramos de limones requerimos para hacer 12.8 litros?
23. Lupita compra 8.3 kilogramos de papas por $59.70 para preparar una ensalada para el paseo de su generación. Para completar la receta le faltaron 3.6 kilogramos. ¿Cuánto dinero necesita?
24. Si 30 trabajadores construyeron una barda de 120 metros de largo en una semana de trabajo. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que en el mismo tiempo construyan 16 metros?

Promedio

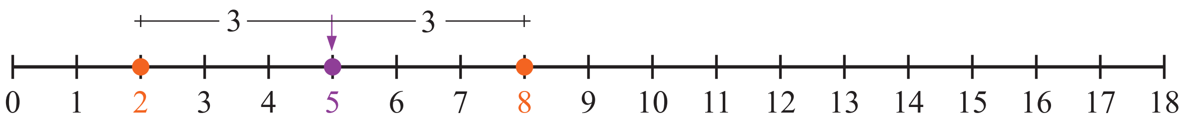
Concepto de promedio

El promedio de dos números es el número que se encuentra entre los dos números y a la misma distancia, es decir, está a la mitad.

Para estudiar el concepto de promedio dibujamos la recta de los números y localizamos dos números.



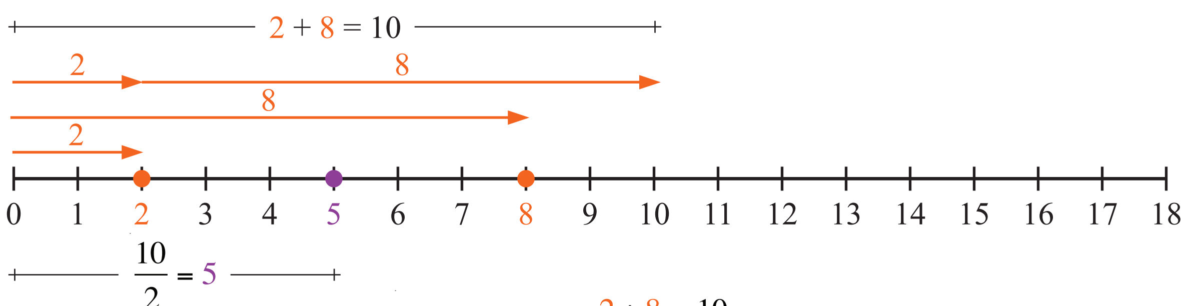
Para encontrar el promedio de 2 y 8, localizamos el punto que se encuentra entre 2 y 8 y a la misma distancia, es decir, a la mitad.



El promedio de 2 y 8 es 5. Lo expresamos como:

$$\text{Promedio}_{2\text{ y }8} = 5$$

Para calcular aritméticamente el promedio, el punto medio, sumamos los números 2 y 8. Para sumar las distancias utilizamos flechas a las que llamamos vectores. La suma la dividimos entre 2.

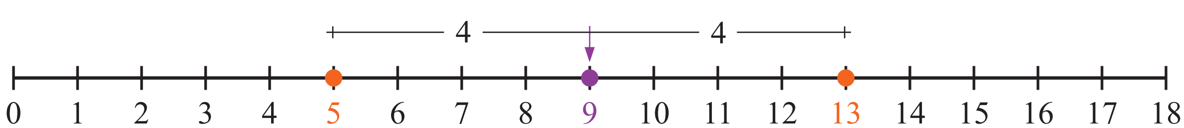


$$\text{Promedio}_{2\text{ y }8} = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

Ejemplo

Localizar en la recta de los números el promedio de 5 y 13. Calcular aritméticamente su valor.

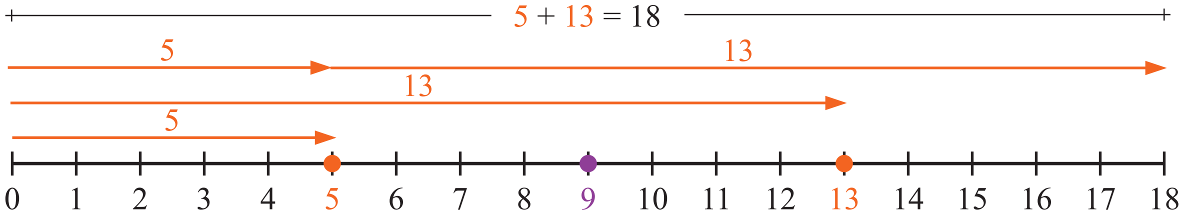
El promedio es el punto que está a la mitad, punto medio, de 5 y 13.



El promedio de 5 y 13 es 9. Lo expresamos como:

$$\text{Promedio}_{5 \text{ y } 13} = 9$$

Para sumar las distancias, utilizamos vectores.

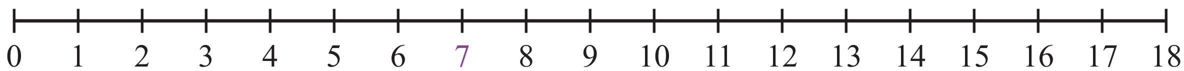


$$\frac{18}{2} = 9$$

$$\text{Promedio}_{5 \text{ y } 13} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

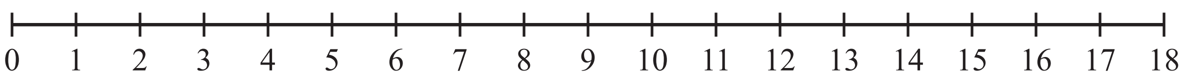
Ejercicio

Localiza en la recta de los números el promedio de 2 y 12. Calcula aritméticamente su valor.



$$\text{Promedio}_{2 \text{ y } 12} =$$

Suma las distancias utilizando vectores.



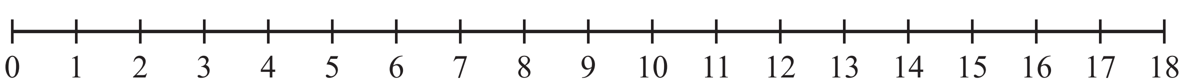
Calcula aritméticamente el promedio.

$$\text{Promedio}_{2 \text{ y } 12} = \frac{\quad + \quad}{\qquad} = \frac{\quad}{\quad} =$$

Ejercicio

Localiza en la recta de los números el promedio de 3 y 15. Calcula aritméticamente su valor.

Localiza el promedio.



$$\text{Promedio}_{3 \text{ y } 15} =$$

La diferencia, o distancia, entre el vector de tamaño 14 y el vector de tamaño 9 que representa el promedio, es un vector de tamaño 5. La diferencia, o distancia, del vector de tamaño 9 que representa el promedio y el vector de tamaño 4, también es un vector de tamaño 5.

Promedio de más de dos números

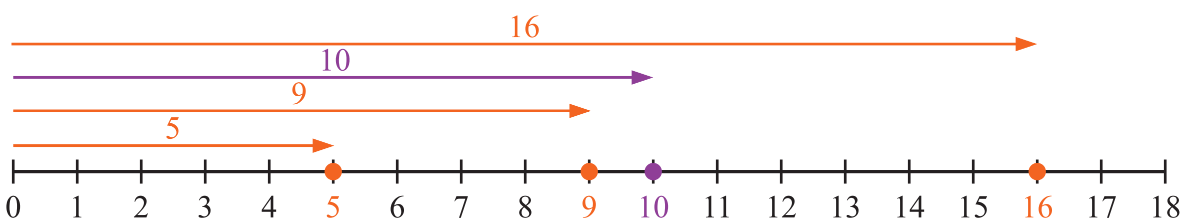
Cuando hay más de dos números, cada uno contribuye al promedio de acuerdo al tamaño del vector que lo representa. El promedio se calcula sumando el tamaño del vector que representa a cada uno de los números y el resultado se divide entre la cantidad total de números.

$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma del tamaño de los vectores de todos los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

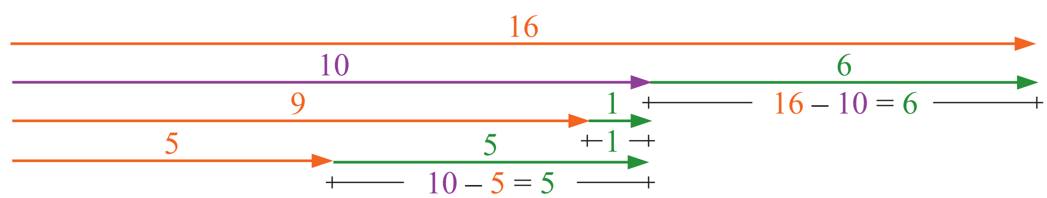
Calcular el promedio de 5, 9 y 16. Demostrar, utilizando vectores, que cada uno de los números contribuye al promedio de acuerdo al tamaño del vector que lo representa.

Para demostrar que el promedio es correcto, dibujamos los vectores que representan el tamaño de los números. Calculamos el promedio.

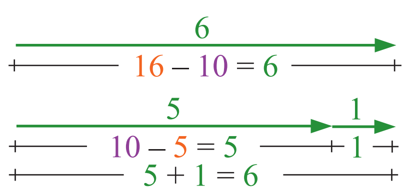


$$\text{Promedio}_{5,\ 9\ \text{y}\ 16} = \frac{5+9+16}{3} = \frac{30}{3} = 10$$

Dibujamos los vectores que representan la diferencia entre el promedio y los números.



El vector de tamaño 16 es mayor que el vector promedio 10. Los vectores de tamaño 5 y 9 son menores que el vector promedio 10. Para demostrar que el promedio es correcto, la suma de las diferencias de los vectores menores y la diferencia del vector mayor debe ser la misma.



Hemos demostrado que el promedio es correcto, ya cada uno de los números contribuye al promedio de acuerdo al tamaño del vector que lo representa.

Ejemplo

Calcular el promedio de 6, 13, 19 y 30. Demostrar, utilizando vectores, que cada uno de los números contribuye al promedio de acuerdo al tamaño del vector que lo representa.

Dibujamos los vectores que representan el tamaño de los números. Calculamos el promedio.

Para demostrar que el promedio es correcto, suma las diferencias de los vectores menores al promedio y suma las diferencias de los vectores mayores al promedio. Demuestra que las sumas de las diferencias son iguales.

Si las sumas de las diferencias son iguales, has demostrado que el promedio es correcto ya cada uno de los números contribuye al promedio de acuerdo al tamaño del vector que lo representa.

Algoritmo para calcular el promedio

Hemos demostrado que el promedio de dos o más números se calcula, sumando el valor de los números y el resultado se divide entre la cantidad total de números.

$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma de todos los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

Calcular, utilizando el algoritmo, el promedio de 6.23 y 7.51.

Sumamos los números y la suma se divide entre 2, ya que son dos números. Efectuamos la división, para obtener el promedio.

$$\text{Promedio}_{6.23,\,7.51} = \frac{6.23+7.51}{2} = \frac{13.74}{2} \longrightarrow \text{Promedio}_{6.23,\,7.51} = 6.87$$

Ejemplo

Calcular el promedio de 5, 8, 11, 15, 38 y 41.

Sumamos los números y la suma se divide entre 6, ya que son seis números. Efectuamos la división para obtener el promedio.

$$\text{Promedio}_{5,\,8,\,11,\,15,\,38,\,41} = \frac{5+8+11+15+38+41}{6} = \frac{118}{6} \longrightarrow \text{Promedio}_{5,\,8,\,11,\,15,\,38,\,41} = 19.66$$

Ejemplo

Las calificaciones de los exámenes mensuales de matemáticas que Lolita obtuvo son: 89, 52, 74 y 91. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?

Para conocer el promedio sumamos las calificaciones. La suma la dividimos entre 4, ya que se trata de cuatro exámenes. Efectuamos la división para obtener el promedio de las calificaciones.

$$\text{Promedio}_{\text{Calificaciones}} = \frac{89+52+74+91}{4} = \frac{306}{4} \longrightarrow \text{Promedio}_{\text{Calificaciones}} = 76.5$$

Serie de problemas

Resuelve los problemas. Usa una hoja aparte, para hacer las operaciones. Para entender mejor el problema, cuando sea posible, hace un dibujo. En algunos casos, tienes que seguir varios pasos para obtener la respuesta.

1. Jaime compró 7 kilogramos de jitomates por $64.40. Decide comprar 4 kilogramos más, ¿cuánto deberá pagar?

   Respuesta.

2. El chofer de un camión de carga recorrió 910 kilómetros en 14 horas, si mantuviera el mismo promedio de velocidad, ¿en cuánto tiempo podrá recorrer los 243 kilómetros que le faltan para llegar a su destino? Expresa la respuesta en horas y minutos.

   Respuesta.

3. En un mapa de carreteras del país, 200 kilómetros de distancia están representados por 2.5 centímetros. Si dos ciudades están en el mapa representadas a una distancia de 9 centímetros, ¿a qué distancia se encuentra una de la otra?

   Respuesta.

4. En una línea de producción 15 obreros arman 255 radios en una hora. Si solamente trabajaran 11 obreros, ¿cuántos radios armarían en una hora?

   Respuesta.

5. En una panadería por cada 84 bolillos que venden se venden 28 piezas de pan dulce. Si fabrican 150 piezas de pan dulce, ¿cuántos bolillos deben hacer?

   Respuesta.

6. Un avión viaja a una velocidad promedio de 750 kilómetros por hora. ¿Cuántos kilómetros viaja en 8 horas con 30 minutos?

   Respuesta.

7. Una camioneta de doble tracción tiene un rendimiento de 4.2 kilómetros por litro. ¿Cuántos kilómetros puede viajar con 64 litros de gasolina?

   Respuesta.

8. Alicia escribe 48 palabras por minuto en la computadora y su hermano Luis escribe 16. Por cada palabra que Luis escribe, ¿cuántas palabras escribe Alicia?

   Respuesta.

9. En una fábrica de ropa para hacer 144 camisas utilizaron 180 metros cuadrados de tela. ¿Cuántas camisas pueden fabricar con 285 metros cuadrados de tela?

   Respuesta.

10. Las calificaciones que Andrés obtuve en los cuatro últimos exámenes de matemáticas son: 86, 91, 57 y 93. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?

    Respuesta.

11. Tomasa utilizó $1\frac{1}{2}$ tazas de harina para hacer 48 galletas. Cuántas tazas de harina debe usar si quiere cocinar 72 galletas?

    Respuesta.

Utilizando los ejemplos anteriores, creamos una fórmula que nos permita calcular el promedio de cualquier conjunto de números.

$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma de todos los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

Las calificaciones mensuales de matemáticas de María son: 9, 6, 8, 4, 10, 7, 8 y 6. ¿Cuál es el promedio de sus calificaciones?

El total de calificaciones es 8, por lo cual:

$$\text{Promedio} = \frac{9+6+8+4+10+7+8+6}{8} = \frac{58}{8} \longrightarrow \text{Promedio} = 7.25$$

Serie de Ejercicios 6

Resolver los problemas. En algunos casos es conveniente hacer un dibujo para mejor entender los datos que nos proporcionan y lo que nos preguntan.

1. Las calificaciones de matemáticas de Arturo son: 5, 8, 9, 9, 4, 10, 6. El promedio de las calificaciones de María es 23% mayor al promedio de las de Arturo. ¿Cuál es el promedio de las calificaciones de María?
2. En la competencia de carreras de la escuela, el tiempo en minutos que siete alumnos hicieron en dar una vuelta completa al patio fue de: 3.2, 3.9, 4.5, 3.6, 4.2, 3.7, 4.4. El promedio de tiempo que cuatro maestros tardaron en recorrer la misma distancia fue 0.15 menor que el de los alumnos. ¿Cuánto les tomó en promedio a los maestros dar la vuelta al patio?
3. Cuatro alumnos de la escuela invirtieron dinero en un negocio. Juan \$4,000, Teresa \$2,500, Luis \$5,300 y José \$3,700. La ganancia total fue de un cuarto sobre el promedio del capital invertido. De la ganancia total a Juan le toca 0.26, a Teresa 0.16, a Luis 0.34 y a José 0.24. ¿Cuánto le tocó a cada uno de utilidad?
4. El número de alumnos que los salones de la secundaria tienen son: 43, 28, 37, 39, 32, 25, 35, 41. Si los grupos de la primaria en promedio tienen un quinto menos estudiantes que el promedio de alumnos por salón de la secundaria, ¿cuántos alumnos en promedio tienen los salones de la primaria?
5. Los alumnos realizan actividades para juntar dinero y adornar los salones de clase. El total recabado por los grupos es: Grupo A \$125, Grupo B \$220, Grupo C \$180, Grupo D \$164, Grupo E \$258, Grupo F \$175. La escuela da una contribución adicional de 0.85 del promedio del dinero de todos los grupos. El dinero donado por la escuela se reparte por partes iguales entre los grupos. ¿Cuánto le toca a cada grupo?
6. En los últimos cuatro exámenes de matemáticas las calificaciones de Mario son: 67, 85, 92, 56. ¿Cuánto debe sacar en el siguiente examen si quiere que su promedio final sea 80?
7. El número de vuelos que llega a un aeropuerto a las horas pico son:
   De las 4:00 pm a las 5:00 pm 137 vuelos. De las 5:00 pm a las 6:00 pm 192 vuelos .
   De las 6:00 pm a las 7:00 pm 154 vuelos. De las 7:00 pm a las 8:00 pm 89 vuelos.
   ¿Cuál es el promedio de vuelos por hora?
8. El promedio del número de alumnos por escuela de la zona es de 532. Si el número total de alumnos en la zona es de 3,724. ¿Cuántas escuelas hay?
9. El servicio metereológico reportó que el promedio de temperatura en la segunda semana del mes de enero a las 6:00 am en la Ciudad de México fue de 3° C. La temperaturas que logramos medir en el laboratorio de física de la escuela son:
   Lunes 2.4° C Martes 3.4° C Miércoles 2.8° C
   Jueves 2.2° C Viernes 2.3° C Sábado 3.7° C
   ¿Cuál fue la temperatura el domingo?

Concepto de raíz cuadrada

Concepto de raíz

La raíz es el origen o fuente de cosas o eventos. Decimos, el ocio es la raíz de todos los vicios. Es decir, el ocio es en donde se originan los vicios.

Concepto de raíz cuadrada

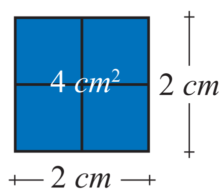
La raíz cuadrada es el origen de un cuadrado cuya área conocemos, es decir, las dimensiones de sus lados.

Cuando conocemos el área de un cuadrado, y queremos conocer el tamaño del cuadrado, obtenemos su raíz cuadrada.

Ejemplo

¿De qué tamaño es un cuadrado cuya área es 4 cm^2?

La raíz cuadrada de 4 es 2, porque $2 \times 2 = 4$. Es decir, el origen de un cuadrado cuya área es 4, es 2.



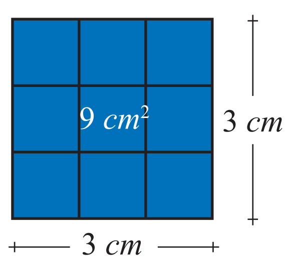
Área = base × altura
Área = 2 cm × 2 cm
Área = 4 cm^2

Raíz cuadrada de 4 = 2

Ejemplo

¿De qué tamaño es un cuadrado cuya área es 9 cm^2?

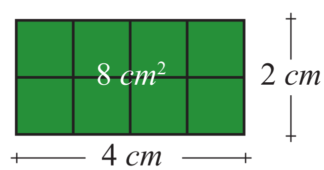
La raíz cuadrada de 9 es 3, porque $3 \times 3 = 9$. Es decir, el origen de un cuadrado cuya área es 9 es 3.



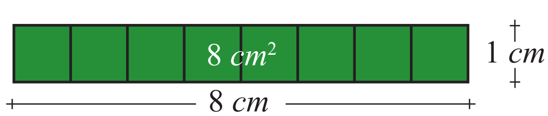
Área = base × altura
Área = 3 cm × 3 cm
Área = 9 cm^2

Raíz cuadrada de 9 = 3

Solamente los cuadrados tienen raíz, ya que es la única figura geométrica que solamente tiene una forma de formar su área. Por ejemplo, un rectángulo cuya área es 8 cm^2, lo podemos construir de muchas formas.

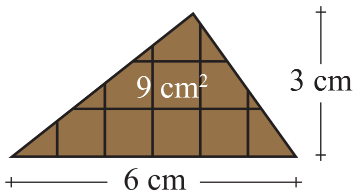


Área = base × altura
Área = 4 cm × 2 cm
Área = 8 cm^2



Área = base × altura
Área = 8 cm × 1 cm
Área = 8 cm^2

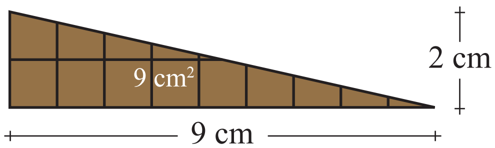
Lo mismo sucede en el caso de los triángulos. Un triángulo de área 9 cm^2, lo podemos construir de muchas formas.



$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{6\ cm \times 3\ cm}{2} = \frac{18\ cm^2}{2}$$

$$\text{Área} = 9\ cm^2$$



$$\text{Área} = \frac{9\ cm \times 2\ cm}{2} = \frac{18\ cm^2}{2}$$

$$\text{Área} = 9\ cm^2$$

De todas las figuras planas con lados rectos cuando conocemos su área, solamente en el caso de los cuadrados, podemos determinar su raíz, es decir, sus dimensiones. Por lo tanto, nada más existen raíces cuadradas, o sea, raíces de cuadrados.

Notación de raíz cuadrada

Para indicar la raíz cuadrada, utilizamos un símbolo parecido a la casita de la división.

Raíz cuadrada de 4 = 2 $\longrightarrow$ $\sqrt{4} = 2$

Raíz cuadrada de 9 = 3 $\longrightarrow$ $\sqrt{9} = 3$

La raíz cuadrada de 4 es 2 y la raíz cuadrada de 9 es 3, porque:

$\sqrt{4} = 2$ $\longrightarrow$ $2 \times 2 = 4$

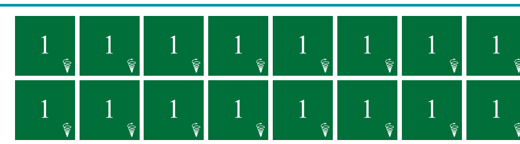
$\sqrt{9} = 3$ $\longrightarrow$ $3 \times 3 = 9$

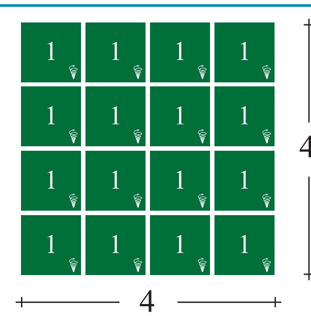
Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico

Calcular la raíz cuadrada consiste en formar un cuadrado cuya área conocemos. Utilizamos el material didáctico, complemento del libro, para hacerlo.

Ejemplo

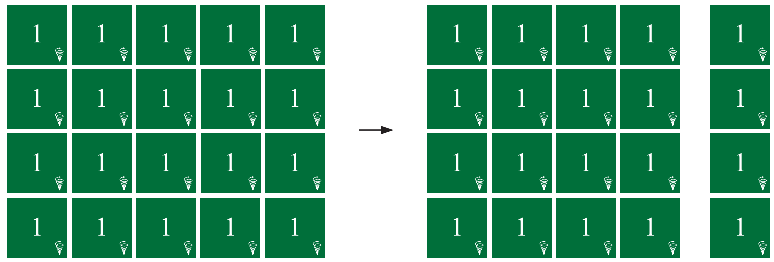
Encontrar la raíz cuadrada de 16.

<table>
<tr><td>El área del cuadrado es 16 u^2, por lo cual, tomamos del material didáctico 16 cuadritos. Cada uno de ellos representa 1 u^2.</td><td></td></tr>
<tr><td>Formamos un cuadrado. Medimos las dimensiones de sus lados para encontrar el valor de la raíz cuadrada.

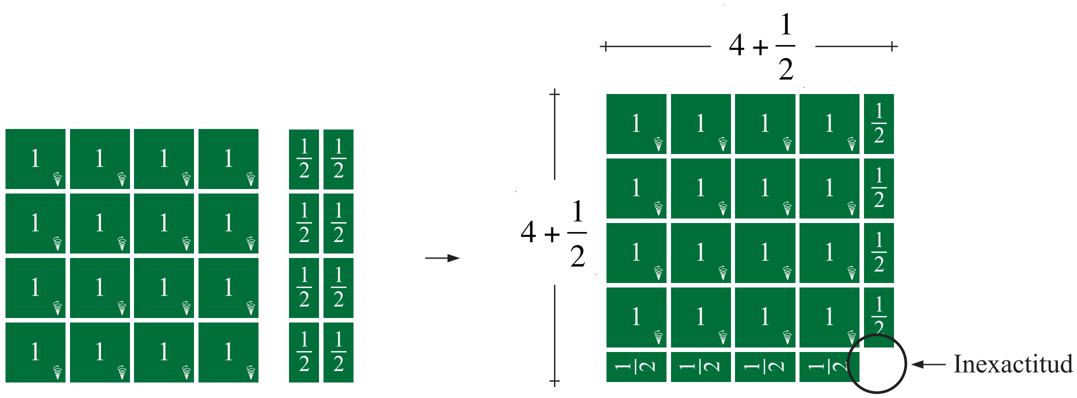
$\sqrt{16} = 4$ $\longrightarrow$ $4 \times 4 = 16$</td><td>
</td></tr>
</table>

Ejemplo

Encontrar la raíz cuadrada de 20.

El área del cuadrado es 20 u^2, por lo cual, tomamos del material didáctico 20 cuadritos. Cada uno de ellos representa 1 u^2.	

No podemos formar un cuadrado ya que los cuatro cuadritos que sobran no los podemos acomodar en los lados del cuadrado. Si dividimos cada cuadrito a la mitad formamos ocho áreas que sí podemos acomodar en los lados del cuadrado. El área de cada uno de estos ocho cuadritos, es la mitad del área de un cuadrito.

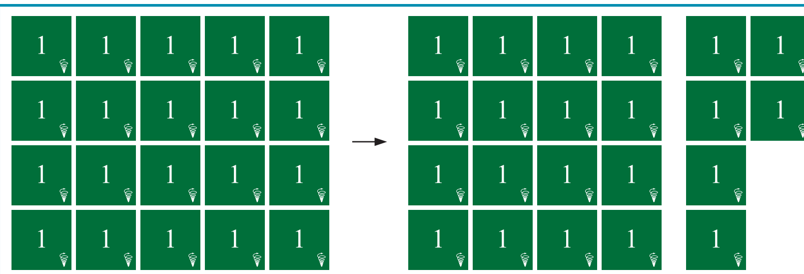


Hemos formado un cuadrado, sin embargo, hay un pequeño espacio de área que está vacío. Por lo cual, el valor de la longitud de los lados del cuadrado no es exacto, tiene una pequeña inexactitud.

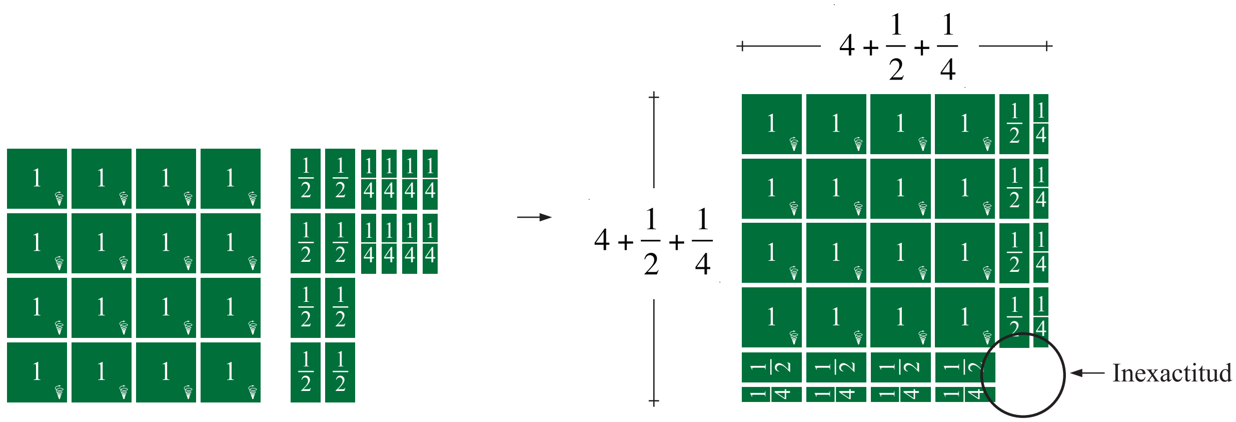
Expresamos la fracción mixta en notación decimal y efectuamos la suma.	$4+\frac{1}{2}=4+0.5=4.5$
La raíz cuadrada de 20 es aproximadamente 4.5. Para expresar que el valor de la raíz cuadrada no es exacto, usamos el símbolo ≈.	$\sqrt{20} \approx 4.5 \quad \rightarrow \quad 4.5 \times 4.5 \approx 20$ Aproximadamente igual

Ejemplo

Encontrar la raíz cuadrada de 22.

El área del cuadrado es 22 u^2, por lo cual, tomamos del material didáctico 22 cuadritos. Cada uno de ellos representa 1 u^2.	

Podemos acomodar formando un cuadrado 16 cuadritos y sobran 6. Como lo hicimos en el ejemplo anterior, 4 cuadritos los dividimos a la mitad. Los 2 cuadritos que restan los dividimos en 4 partes iguales cada uno, para formar 8 áreas que podemos colocar formando un cuadrado.



El pequeño espacio de área vacío es la inexactitud. Para tener el valor exacto de las dimensiones tendríamos que llenar toda el área, lo cual no es posible. Por lo tanto, el valor de la longitud de los lados del cuadrado no es exacto, tiene una pequeña inexactitud.

Expresamos la fracción mixta en notación decimal y efectuamos la suma.	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=4+0.5+0.25\approx 4.75$
La raíz cuadrada de 22 es aproximadamente 4.75.	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=4+0.5+0.25\approx 4.75$

Serie de ejercicios 1

Utilizando las cartulinas 5, 6 y 7 del material didáctico complemento del libro, obtén el valor aproximado de las raíces cuadradas.

$\sqrt{10}\approx$

$\sqrt{18}\approx$

$\sqrt{27}\approx$

$\sqrt{38}\approx$

$\sqrt{11}\approx$

$\sqrt{42}\approx$

$\sqrt{29}\approx$

$\sqrt{12}\approx$

$\sqrt{44}\approx$

$\sqrt{22}\approx$

$\sqrt{39}\approx$

$\sqrt{30}\approx$

$\sqrt{40}\approx$

$\sqrt{20}\approx$

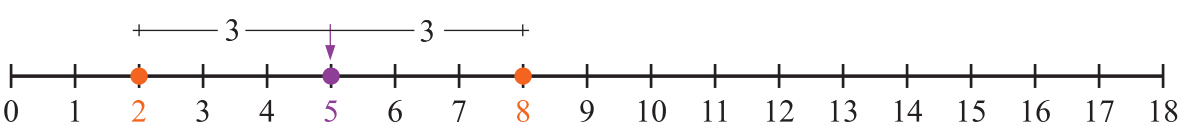
$\sqrt{46}\approx$

Algoritmo de la raíz cuadrada

Conceptos requeridos para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada

Para construir un algoritmo, es decir, un procedimiento que nos permita obtener el valor de cualquier raíz cuadrada, requerimos aplicar tres conceptos que ya hemos estudiado.

Primer concepto La división es la operación inversa de la multiplicación. Podemos comprobar que la división es correcta, si efectuamos una multiplicación.	$\frac{20}{4} = 5 \rightarrow 20 = 5 \times 4$ $\frac{63}{7} = 9 \rightarrow 63 = 9 \times 7$
Segundo concepto La raíz cuadrada es la longitud de los lados de un cuadrado cuya área conocemos. La raíz cuadrada podemos también enunciarla como el número que al multiplicarlo por sí mismo nos da el número cuya raíz cuadrada queremos conocer.	$4 \times 4 = 16 \rightarrow \sqrt{16} = 4$ $7 \times 7 = 49 \rightarrow \sqrt{49} = 7$
Tercer concepto El promedio es el número que se encuentra a la mitad de dos números. Se calcula sumando los números y dividiendo la suma entre 2.	$\text{Promedio}_{2 \text{ y } 8} = \frac{2+8}{2} = 5$



Estrategia para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada

Para crear un algoritmo que nos permita en forma sencilla obtener el valor de cualquier raíz cuadrada, utilizamos el hecho de que si al dividir un número entre otro número el resultado –cociente– es igual al divisor –denominador–, entonces, el divisor –denominador–, es la raíz cuadrada del dividendo –numerador–.

$$\frac{25}{5} = 5 \rightarrow 25 = 5 \times 5 \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

son iguales son iguales

$$\frac{64}{8} = 8 \rightarrow 64 = 8 \times 8 \rightarrow \sqrt{64} = 8$$

son iguales son iguales

La estrategia que vamos a utilizar, consiste en ir aproximando el denominador y el resultado hasta hacerlos iguales. El algoritmo requiere de tres pasos, por lo cual, lo llamamos en este libro de texto, el algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada.

El algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada

Los tres pasos que repetimos tantas veces como sea necesario son:

1. Determinar una raíz aproximada.
2. Dividir el número entre la raíz aproximada.
3. Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

Ejemplo

Obtener la raíz cuadrada de 30.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	Una raíz aproximada de 30 es 5, ya que $5 \times 5 = 25$. Otra raíz aproximada de 30 es 6, porque $6 \times 6 = 36$. Para aplicar el algoritmo, podemos utilizar cualquiera de los dos. Escogemos 5.
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{30}{5} = 6$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	$\text{Promedio}_{5 \text{ y } 6} = \frac{5+6}{2} = 5.5$

Repetimos los tres pasos, utilizando la nueva raíz aproximada.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	Una raíz aproximada de 30 es 5.5.
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{30}{5.5} = 5.454$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	$\text{Promedio}_{5.5 \text{ y } 5.454} = \frac{5.5+5.454}{2} = 5.477$

Repetimos los tres pasos, utilizando la nueva raíz aproximada.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	Una raíz aproximada de 30 es 5.477.
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{30}{\boxed{5.477}} = \boxed{5.477}$ son iguales
Tercer paso El denominador y el resultado de la división son iguales, por lo tanto, 5.477 es la raíz cuadrada de 30, ya que:	$5.477 \times 5.477 = 30 \rightarrow \sqrt{30} = 5.477$

Generalmente basta con repetir dos o tres veces los tres pasos, para obtener el valor de la raíz cuadrada.

Ejercicio

Encuentra, utilizando el método de los tres pasos, la raíz cuadrada de 213.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{\quad}{\quad} =$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	Promedio $= \frac{\quad}{\quad} =$

Repite los tres pasos, utilizando la nueva raíz aproximada.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{\quad}{\quad} =$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	Promedio $= \frac{\quad}{\quad} =$

La raíz cuadrada de 213 es:

$$\sqrt{213} =$$

Serie de ejercicios 2

En tu cuaderno de trabajo, siguiendo el método de los tres pasos, calcula el valor de las raíces cuadradas.

$\sqrt{14} =$

$\sqrt{19} =$

$\sqrt{32} =$

$\sqrt{28} =$

$\sqrt{61} =$

$\sqrt{45} =$

$\sqrt{86} =$

$\sqrt{78} =$

$\sqrt{92} =$

$\sqrt{87} =$

$\sqrt{105} =$

$\sqrt{200} =$

$\sqrt{871}$ =

$\sqrt{719}$ =

$\sqrt{922}$ =

$\sqrt{830}$ =

$\sqrt{277}$ =

$\sqrt{182}$ =

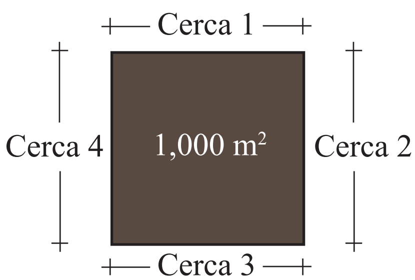
$\sqrt{410}$ =

$\sqrt{500}$ =

Ejemplo

En el rancho Las Arboledas van a construir un corral de forma cuadrada con una área de 1,000 m^2. ¿Cuántos metros de cerca necesitan para cerrar el área completa?

Hacemos un dibujo para entender mejor el problema.



Longitud total = Cerca 1 + Cerca 2 + Cerca 3 + Cerca 4

Debido a que el terreno es cuadrado, la longitud de cada uno de sus lados es la misma y su valor es la raíz cuadrada de 1,000.

Aplicamos el método de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	Una raíz aproximada de 1,000 es 30, ya que 30 × 30 = 900.
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{1,000}{30} = 33.333$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	$\text{Promedio}_{30 \text{ y } 33.333} = \frac{30 + 33.333}{2} = 31.666$

Repetimos los tres pasos, utilizando la nueva raíz aproximada.

Primer paso Determinar una raíz aproximada.	La nueva raíz aproximada de 1,000 es 33.166.
Segundo paso Dividir el número entre la raíz aproximada.	$\frac{1,000}{31.666} = 31.579$
Tercer paso Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.	$\text{Promedio}_{31.666 \text{ y } 31.579} = \frac{31.666 + 31.579}{2} = 31.622$

La raíz cuadrada de 1,000, es decir, la longitud de cada uno de los lados del corral es:

$$\sqrt{1{,}000} = 31.622$$

El total de cerca que se requiere para cerrar el corral es:

$$\text{Cerca}_{\text{total}} = 31.622 \times 4 = 126.488 \text{ m.}$$

Serie de problemas

Resuelve los problemas. Usa una hoja aparte, para hacer las operaciones. Para entender mejor el problema, cuando sea posible, hace un dibujo. En algunos casos, tienes que seguir varios pasos para obtener la respuesta.

1. Una compañía constructora va a hacer un desarrollo habitacional en un terreno de 24,000 m^2. El primer paso es construir una barda para cercar el terreno. ¿Cuál es la longitud de la barda?
   La altura de la barda es de 2 metros. ¿Cuál es el área de la barda?

   Respuesta.

2. El área total de todas las caras de un cubo es 181 cm^2. ¿Cuánto miden las aristas del cubo?

   Respuesta.

3. En el rancho Maravillas quieren construir un corral. Cuentan con un terreno cuadrado de 625m^2. ¿Cuánto mide la cerca del corral?
   Para construir la cerca necesitan instalar un poste cada 5 metros. ¿Cuántos postes deben instalar en total?

   Respuesta.

4. Un grupo de estudiantes pintan el estacionamiento de la escuela. El área total del estacionamiento es 576 m^2. Quieren pintar una raya amarilla que delimite el área del estacionamiento. ¿De qué longitud es la raya?

   Respuesta.

5. Roberto quiere poner azulejo en la pared del baño de su casa. Cuenta 400 azulejos cuadrados. Cada azulejo tiene un área de 156.25 cm^2. Decide colocarlos formando un cuadro. ¿De qué longitud y altura es el cuadro que forma?

   Respuesta.

Primer paso
Determinar una raíz aproximada.

Una raíz aproximada de 12,000 es 100, ya que: $100 \times 100 = 10{,}000$.

Segundo paso
Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{12{,}000}{100} = 120$$

Tercer paso
Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{100 \text{ y } 120} = \frac{100 + 120}{2} = 110$$

Repetimos los tres pasos utilizando la nueva raíz aproximada.

Primer paso
Determinar una raíz aproximada.

Una raíz aproximada de 12,000 es 110.

Segundo paso
Dividir el número entre la raíz aproximada.

$$\frac{12{,}000}{110} = 109.09$$

Tercer paso
Obtener el promedio del resultado de la división y el divisor. El promedio es la siguiente raíz aproximada.

$$\text{Promedio}_{110 \text{ y } 109.09} = \frac{110 + 109.09}{2} = 109.54$$

$$\sqrt{12{,}000} = 109.54$$

La longitud total de la barda es: $109.54 \times 4 = 438.16$ metros.

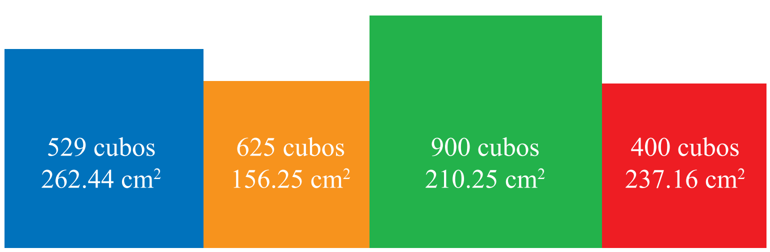
Serie de Ejercicios 9

Resolver los problemas. En algunos casos es conveniente hacer un dibujo para mejor entender los datos que nos proporcionan y lo que nos preguntan.

1. Una compañía constructora va a construir una barda de 3 metros de altura para cercar un terreno cuadrado cuya área es de 44,000 m^2. ¿Cuál es el área de la barda?
2. El área total de todas las caras de un cubo es 168 cm^2. ¿Cuánto miden las aristas del cubo?
3. En un rancho van a construir una cerca en un invernadero que tiene una área cuadrada de 756.25 m^2. Cada 5.5 metros deben colocar un poste. ¿Cuánto mide la cerca del invernadero y cuántos postes deben colocar?
4. En un condominio construyen una banqueta de 1.5 metros de ancho al rededor del estacionamiento que tiene un área cuadrada de 1,056 m^2. ¿Cuál es el área de la banqueta?
5. Para construir una barda utilizan cubos de concreto ligero de cuatro colores. La cantidad de cubos con los que cuentan, los colores y el área de sus caras son:

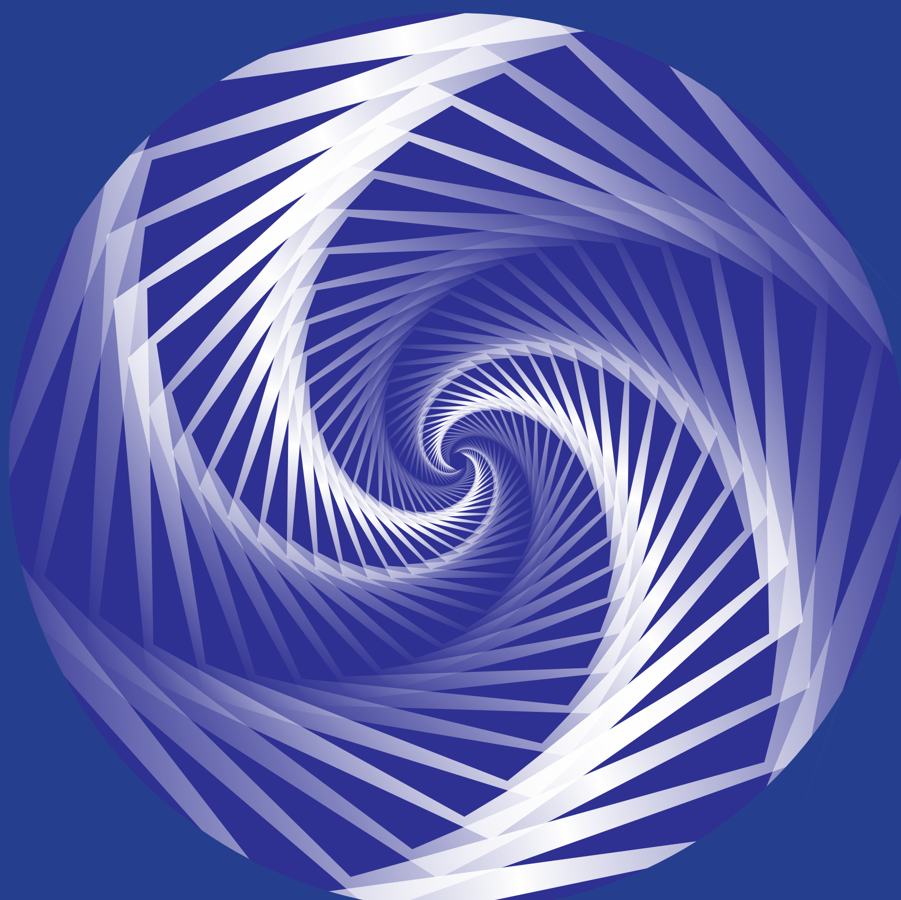
Número de cubos	Color	Área de sus caras	Número de cubos	Color	Área de sus caras
529	Azul	262.44 cm^2	625	Naranja	156.25 cm^2
900	Verde	210.25 cm^2	400	Rojo	237.16 cm^2

¿Cuánto mide en metros cuadrados cada uno de los cuadrados que forman la barda?



Álgebra 1

Séptimo y Octavo Niveles de Abstracción



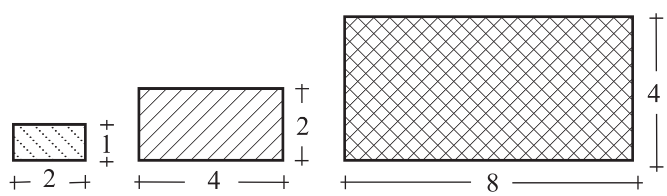
MORENO

Proporciones

Concepto de proporcionalidad

Cuando dos figuras geométricas son iguales, es decir, son homogéneas pero tienen diferente tamaño, decimos que son proporcionales.

Al examinar cuidadosamente las figuras nos damos cuenta que las dimensiones de la segunda son el doble de las de la primera y la mitad de las de la tercera, o bien, que la tercera es el cuádruple de la primera. A la relación que guarda una con la otra se le llama la proporcionalidad.



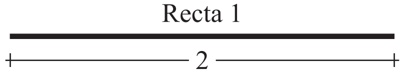
Primero vamos a establecer la proporción entre rectas.

Rectas proporcionales

Se dice que una recta de 2 metros es proporcional a otra que mide 1 metro, ya que es el doble de tamaño. La constante que las relaciona, *constante de proporcionalidad*, es 2.
Ahora bien, si tomamos primero la recta de 1 metro y la relacionamos a la de 2 metros, entonces decimos que la recta es la mitad.

A la constante de proporcionalidad la denotamos con la letra k y establecemos la proporcionalidad como se muestra en la figura.
La constante de proporcionalidad k nos indica cuál es la proporción que guardan las rectas, pero considerando qué recta tomamos primero, es decir, cómo establecemos la relación.

Recta 1



Si $k = 2$

Longitud recta 1 = k · Longitud recta 2

$$2 = 2 \times 1$$

$$k = \frac{\text{Longitud recta 1}}{\text{Longitud recta 2}} = \frac{2}{1} = 2$$

o también:

Recta 2

Si $k = \frac{1}{2}$

Longitud recta 2 = k · Longitud recta 1

$$1 = \frac{2}{1} \times 2$$

$$k = \frac{\text{Longitud recta 2}}{\text{Longitud recta 1}} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Una recta mide 3.2 cm, encuentra una recta proporcional a ella, si la constante de proporcionalidad es 4.

Si k = 4, entonces:

La recta proporcional mide: $3.2 \times 4 = 12.8$ cm

Ejemplo

Una recta mide 8 cm y otra mide 20 cm, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

Si tomamos la recta mayor como referencia, la constante de proporcionalidad es:

$$\frac{20}{8} = 2.5$$

Pero, si tomamos como referencia la recta menor, la constante de proporcionalidad es:

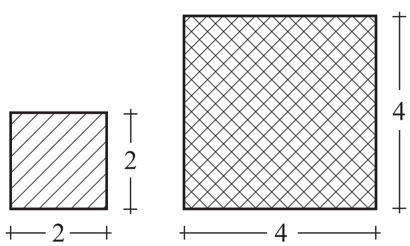
$$\frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$$

Figuras geométricas proporcionales o semejantes

Dos figuras geométricas son proporcionales o semejantes cuando todos sus lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad, es decir, cuando su constante de proporcionalidad k es la misma

Por lo tanto, para saber si dos figuras geométricas son semejantes debemos verificar que la constante de proporcionalidad de todos sus lados correspondientes sea la misma.

Cuadrado



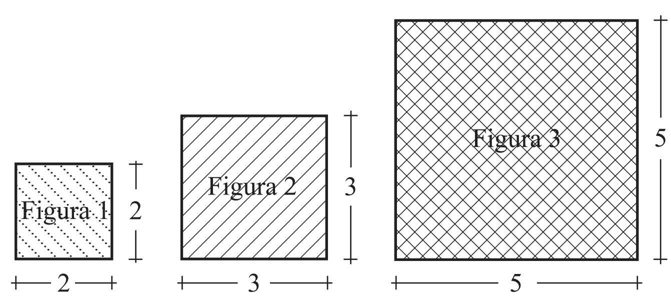
$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} \rightarrow k = \frac{2}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} \rightarrow k = \frac{4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Los dos cuadrados son semejantes o proporcionales ya que todos sus lados correspondientes tienen la misma constante k de proporcionalidad.

Ejemplo

Verificar si los siguientes tres cuadrados son semejantes.



Primero verificamos que la figura 1 sea proporcional a la figura 2.

$$k = \frac{\text{Base}_{\text{Cuadrado 1}}}{\text{Base}_{\text{Cuadrado 2}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 1}}}{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 2}}} \rightarrow k = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0.666$$

También verificamos que todos los lados correspondientes del cuadrado 2 sean proporcionales a los del 3 y que todos los lados correspondientes del cuadrado 1 también sean proporcionales a los lados del cuadrado 3.

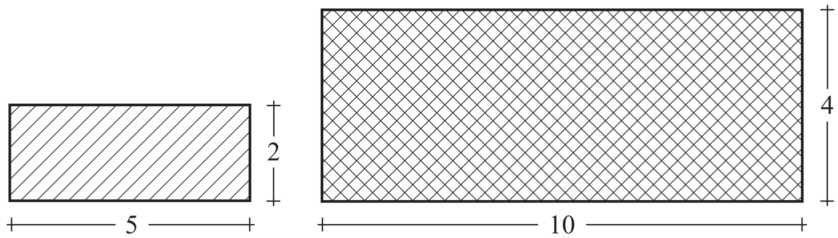
$$k = \frac{\text{Base}_{\text{Cuadrado 3}}}{\text{Base}_{\text{Cuadrado 2}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 3}}}{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 2}}} \rightarrow k = \frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1.666$$

$$k = \frac{\text{Base}_{\text{Cuadrado 3}}}{\text{Base}_{\text{Cuadrado 1}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 3}}}{\text{Altura}_{\text{Cuadrado 1}}} \rightarrow k = \frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

El cuadrado 1 es semejante al cuadrado 2 y al 3, así como también el cuadrado 2 es semejante al 3.

De hecho todos los cuadrados son semejantes, ya que todos sus lados correspondientes siempre son proporcionales.

Rectángulo



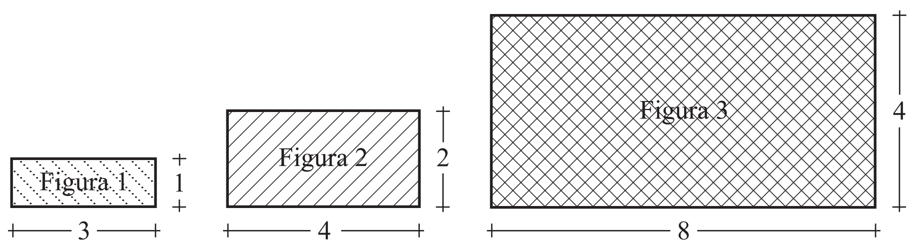
$$k_1 = \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{5}{10} \rightarrow k_2 = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{2}{4} \therefore \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{2}{4} \rightarrow k_1 = k_2 = \frac{5}{10} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$k_1 = \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{10}{5} \rightarrow k_2 = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{4}{2} \therefore \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{4}{2} \rightarrow k_1 = k_2 = \frac{10}{5} = \frac{4}{2} = 2$$

Los dos rectángulos son semejantes o proporcionales, ya que sus lados correspondientes tienen la misma constante k de proporcionalidad.

Ejemplo

Determina si los siguientes tres rectángulos son semejantes.



Primero verificamos si el rectángulo 1 es proporcional al rectángulo 2 y al 3.

$$k_1 = \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{3}{4} \rightarrow k_2 = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{1}{2} \therefore \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}} \neq \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}} \rightarrow k_1 \neq k_2$$

$$k_1 = \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{8}{3} \rightarrow k_2 = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}} = \frac{4}{1} \therefore \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}} \neq \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}} \rightarrow k_1 \neq k_2$$

El rectángulo 1 no es semejante ni al rectángulo 2 ni al 3, ya que sus lados correspondientes no guardan la misma proporcionalidad.

Ahora probamos si el rectángulo 2 es semejante al rectángulo 3, verificando si sus lados correspondientes son proporcionales.

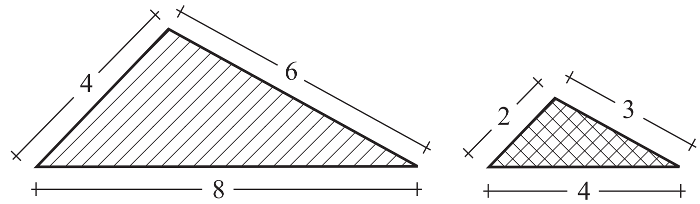
$$k_1 = \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 3}}} = \frac{4}{8} \rightarrow k_2 = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 3}}} = \frac{2}{4} \therefore \frac{\text{Base}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Base}_{\text{Rectángulo 2}}} = \frac{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 1}}}{\text{Altura}_{\text{Rectángulo 2}}} \rightarrow k_1 = k_2 = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = 0.5$$

El rectángulo 2 sí es semejante al 3, ya que sus lados correspondientes tienen la misma proporcionalidad. Es claro que no todos los rectángulos son semejantes.

Triángulo

Los triángulos semejantes o proporcionales son muy importantes, ya que se utilizan en muchas demostraciones geométricas.

Dos triángulos son semejantes o proporcionales si son iguales en su forma, es decir, son homogéneos aunque diferentes de tamaño. Así mismo, es cuando los tres pares de lados correspondientes tienen la misma constante de proporcionalidad *k*.

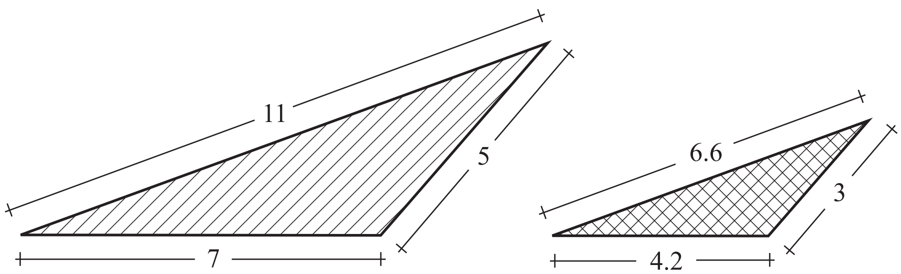


$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Figura 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Figura 2}}} \rightarrow k = \frac{8}{4} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$$

$$k = \frac{\text{Lado } 1_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 1_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 2_{\text{Figura 1}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Figura 2}}}{\text{Lado } 3_{\text{Figura 1}}} \rightarrow k = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo

Demostrar que los siguientes triángulos son semejantes.



Para demostrar que los triángulos son semejantes, es necesario verificar que los tres lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad. Podemos tomar como triángulo 1 a cualquiera de los dos.

$$\frac{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{4.2}{7} = 0.6 \rightarrow \frac{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{3}{5} = 0.6 \rightarrow \frac{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{6.6}{11} = 0.6$$

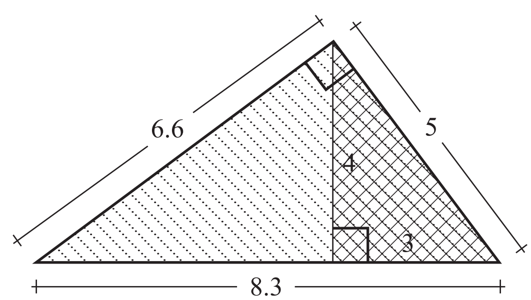
$$k = \frac{4.2}{7} = \frac{3}{5} = \frac{6.6}{11} = 0.6 \quad \therefore \quad \frac{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 2}}} = 0.6$$

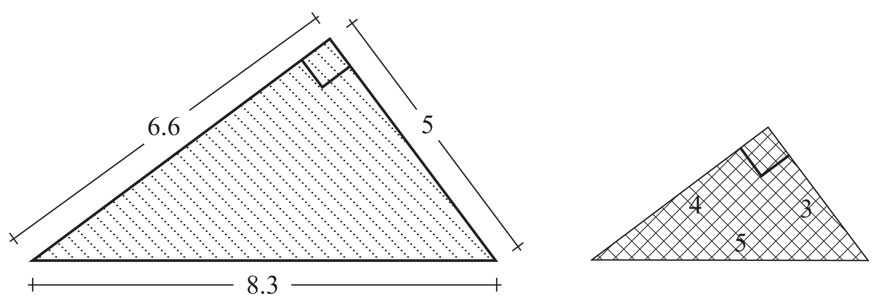
Los dos triángulos son semejantes.

Ejemplo

Demuestra que el triángulo 6.6, 8.3, 5 es semejante al triángulo 3, 4, 5.

Es necesario demostrar que los tres lados correspondientes guardan la misma proporcionalidad. Para localizar los lados correspondientes utilizamos como referencia el ángulo recto en ambos triángulos.





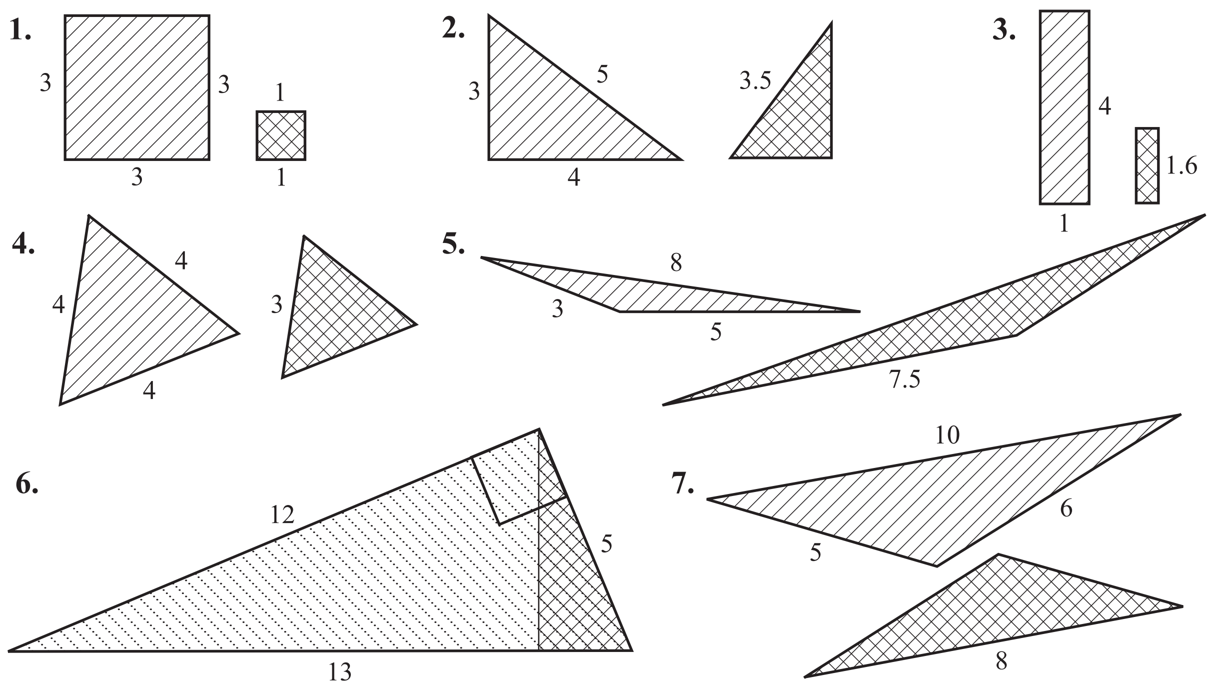
$$\frac{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{5}{3} = 1.6 \quad \rightarrow \quad \frac{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 2}}} = 1.6 = 0.6 \quad \rightarrow \quad \frac{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{8.3}{5} = 1.6$$

$$k = \frac{5}{3} = \frac{6.6}{4} = \frac{8.3}{5} = 1.6 \quad \therefore \quad \frac{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 1_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 2_{\text{Triángulo 2}}} = \frac{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 1}}}{\text{Lado } 3_{\text{Triángulo 2}}} = 1.6$$

Los dos triángulos son semejantes, ya que sus lados correspondientes tienen la misma proporcionalidad.

Serie de Ejercicios 1

Encuentra la constante de proporcionalidad expresada de dos formas diferentes y encuentra la longitud de los lados de las figuras.



Las proporciones las podemos plantear como fracciones

Cuando las proporciones las planteamos como fracciones, podemos resolver problemas de una manera muy sencilla.

Una aplicación muy útil, cuando las proporciones las planteamos como fracciones, es la regla de tres.

Primera aplicación de las proporciones. Regla de tres

Una de las aplicaciones de la proporcionalidad que se utiliza comúnmente para resolver problemas, es lo que conocemos con el nombre de regla de tres. Le llamamos así, porque de los 4 datos contenidos en una proporción, sólo conocemos 3.

En las figuras geométricas la proporción se establece entre pares de lados correspondientes; en el caso de problemas de aritmética, la proporción se determina entre datos que contienen la misma unidad o representan el mismo objeto.

Las proporciones son ecuaciones

Para resolver problemas utilizando la regla de tres, aplicamos el concepto de ecuación, para despejar la incógnita.

El dato desconocido o incógnita lo representamos con la letra x.

Sabemos que la proporción se puede establecer tomando primero la figura geométrica mayor o la menor. Lo importante es que siempre guardemos la misma relación.

Ejemplo

Con 4 litros de pintura pintamos 100 metros cuadrados. ¿Cuántos metros cuadrados podemos cubrir con 7 litros?

Planteamos la proporción entre litros y metros cuadrados diciendo: 100 metros cuadrados se pintan con 4 litros, x metros cuadrados se pintan con 7 litros. En lenguaje matemático se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{100\ m^2}{4\ l} = \frac{x\ m^2}{7\ l} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \ m^2 \text{ en los numeradores.} \\ \rightarrow \ l \text{ en los denominadores.} \end{array}$$

Escribimos la igualdad dejando del lado izquierdo la x y resolvemos la división.

$$\frac{x}{7} = \frac{100}{4} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{7} = 25$$

Luego, despejamos la variable x, pasando al lado derecho de la ecuación todo lo que divide al lado izquierdo.

$$\frac{x}{7} = 25 \quad \rightarrow \quad x = 25 \times 7 = 175\ m^2$$

Si lo creemos conveniente para hacer más sencilla la solución de la ecuación, al plantear la ecuación, si la x queda en el denominador del lado derecho, podemos intercambiar ambos lados de la ecuación y los numeradores y denominadores, ya que lo importante es guardar siempre la misma relación.

$$\frac{4l}{100\ m^2} = \frac{7l}{x\ m^2} \quad \rightarrow \quad \frac{100\ m^2}{4l} = \frac{x\ m^2}{7l} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{7} = \frac{100}{5}$$

Ejemplo

En una línea de producción, al trabajar 48 horas producen 1,600 radios. ¿Cuántos radios fabricarán si se trabajan 60 horas?

Si al plantear el problema la incógnita x queda en el numerador, despejar la incógnita es más sencillo; por lo tanto, lo planteamos diciendo: 1,600 radios se producen en 48 horas, x radios se producen en 60 horas.

$$\frac{1{,}600 \text{ radios}}{48 \text{ horas}} = \frac{x \text{ radios}}{60 \text{ horas}} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \ \text{Radios en los numeradores.} \\ \rightarrow \ \text{Horas en los denominadores.} \end{array}$$

Planteamos la ecuación, dejando del lado izquierdo la incógnita x.

$$\frac{x}{60} = \frac{1{,}600}{48} \quad \rightarrow \quad \frac{x}{60} = 33.33$$

Despejamos la incógnita x para obtener el resultado.

$$\frac{x}{60} = 33.33 \quad \rightarrow \quad x = 33.33 \times 60 = 2{,}000$$

En 60 horas la línea de producción fabrica 2,000 radios.

Segunda aplicación de las proporciones. Razón

Una razón es una proporción especial, ya que el denominador es siempre 1. Una razón es fácil de usar porque uno de los denominadores es siempre 1.

Las razones las utilizamos con tanta frecuencia, que en muchas ocasiones es posible describirlas con palabras.

Kilómetros por hora. $\rightarrow \dfrac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 hora}}$

Revoluciones por minuto. $\rightarrow \dfrac{\text{Número de revoluciones}}{\text{1 minuto}}$

Kilómetros por litro. $\rightarrow \dfrac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 litro}}$

Para resolver problemas con razones utilizamos también el concepto de ecuación.

Ejemplo

Sabemos que un carro recorre 14 kilómetros por litro, si queremos viajar 130 kilómetros, ¿cuántos litros de gasolina necesitamos?

Con el lenguaje matemático, el problema se plantea de la siguiente manera:

$$\frac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 litro}} \rightarrow \frac{14\ km}{1\ l} = \frac{130\ km}{x\ l}$$

Del lado izquierdo escribimos la fracción que contiene a la x, para hacer más sencillo despejar la incógnita, intercambiamos en ambos lados de la ecuación y los numeradores y los denominadores.

$$\frac{130\ km}{x\ l} = \frac{14\ km}{1\ l} \rightarrow \frac{x}{130} = \frac{1}{14} \rightarrow \frac{x}{130} = 0.071$$

Despejamos la incógnita x para obtener el resultado.

$$\frac{x}{130} = 0.071 \rightarrow x = 0.071 \times 130 = 9.28$$

Necesitamos 9.28 litros de gasolina para recorrer 130 kilómetros.

Ejemplo

Viajando a 80 kilómetros por hora, ¿cuántos kilómetros recorremos en 10 minutos?

Sabemos que 1 hora tiene 60 minutos, por lo tanto:

$$\frac{\text{Número de kilómetros}}{\text{1 hora}} \rightarrow \frac{\text{80 kilómetros}}{\text{60 minutos}} = \frac{x\ \text{kilómetros}}{\text{10 minutos}}$$

Del lado izquierdo, escribimos la fracción que contiene a la x.

$$\frac{x}{10} = \frac{80}{60} \rightarrow \frac{x}{10} = 1.33$$

Despejamos la incógnita x para obtener el resultado.

$$x = 1.33 \times 10 \rightarrow x = 13.3$$

En 10 minutos recorremos 13.3 kilómetros.

Serie de Ejercicios 3

Resolver los problemas. Verificar el resultado.

1. Con $430 compramos 26 metros de tela, ¿cuánto dinero necesitamos para comprar 62 metros?
2. ¿Cuánto litros de gasolina necesitamos para viajar 545 kilómetros, si el vehículo recorre 11 kilómetros por litro?
3. Con 172 horas de trabajo es posible cercar un terreno de 63 metros de perímetro, si trabajamos 300 horas, ¿cuántos metros podemos cercar?
4. Para hacer 368 bolillos necesitamos 125 gramos de levadura. Si sólo queremos producir 132 bolillos, ¿cuántos gramos de levadura requerimos?
5. En un mapa de la ciudad 1 centímetro representa 800 metros. ¿Cuál es la distancia entre dos colonias que se encuentran a 3.8 centímetros?
6. Juan corre 1,700 metros en 21 minutos. Si mantiene este paso, ¿cuánto tiempo tardará en recorrer 2.5 kilómetros?
7. En el supermercado anuncian que la bolsa con 4 kilogramos de manzanas cuesta $21.50. ¿Cuánto cuesta una bolsa que pesa 3.2 kilogramos?
8. En una escuela de educación especial necesitan al menos 3 maestros por cada 40 alumnos. Si cuentan con 8 maestros, ¿cuántos alumnos pueden admitir?
9. En una línea de producción, 14 trabajadores ensamblan 124 radios por hora. Si queremos producir 160 radios por hora, ¿cuántos trabajadores se requieren?
10. El departamento de idiomas de la universidad reportó que por cada 5 estudiantes, 2 se inscriben para estudiar alemán y 3 inglés. Si la universidad admite 210 alumnos, ¿cuántos se inscribirán en alemán y cuántos en inglés?
11. En el equipo de atletismo de la escuela hay 4 niñas por cada 7 niños. Si el equipo cuenta con 143 competidores, ¿cuántos niños hay?
12. Una fotografía mide 12 centímetros de ancho y 18 centímetros de alto. Si ampliamos el ancho a 16 centímetros, ¿cuánto debemos ampliar el alto para guardar la misma proporción?
13. Una compañía de transportación cobra una tarifa proporcional al peso. Enviamos un paquete de 122.4 kilogramos y nos cobran $322.70. Si enviamos un paquete que pesa 173.20 kilogramos, ¿cuánto debemos pagar?
14. Un frasco de vitaminas con 280 pastillas cuesta $72.50, ¿cuánto cuesta un frasco que tiene 220 pastillas?
15. En una fábrica de dulces necesitan 73.25 kilogramos de azúcar para elaborar 1,328 caramelos. Si la producción se incrementa a 1,642 caramelos, ¿cuántos kilogramos de azucar necesitan?
16. Alicia quiere comprar un carro cuyo precio de lista es de $35,128.00, pero incluyendo el impuesto cuesta $39,079.90. Si escogiera un automovil que tiene como precio de lista $43,530.00 y la tasa de impuesto es la misma, ¿cuál es el precio incluyendo el impuesto?
17. De cada 7 alumnos que hay en una escuela, 3 son menores de 10 años. Si en la escuela hay 805 alumnos, ¿cuántos son mayores de 10 años?
18. Entre 9 amigos lograron mover una viga de concreto de 261 kilogramos. ¿A cuántos amigos más deben invitar si quieren mover una viga de 319 kilogramos?
19. En una encuesta que hizo una fábrica de pasteles sobre la preferencia de sabores, encontraron que 7 de cada 9 personas prefieren el pastel de chocolate sobre el de vainilla. Si 328 personas votaron por el pastel de vainilla, ¿cuántas personas prefirieron el de chocolate?
20. A las 3:00 pm, un árbol de 8.2 metros de altura proyecta una sombra de 11.6 metros. A la misma hora, ¿que sombra proyecta un árbol de 12.5 metros de altura?
21. Cecilia sale de vacaciones un fin de semana con su familia. En su diario anota las distancias que recorren cada día y el tiempo que tardan en hacerlo. El viernes recorrieron 127 kilómetros en 1 hora con 45 minutos. El sábado manejaron 243 kilómetros en 3 horas con 12 minutos y el domingo 176 kilómetros en 2 horas con 20 minutos. ¿Cuál la velocidad promedio a la que viajaron?
22. Para preparar 22.5 litros de agua de limón utilizamos 3.4 kilogramos de limones. ¿Cuántos kilogramos de limones requerimos para hacer 12.8 litros?
23. Lupita compra 8.3 kilogramos de papas por $59.70 para preparar una ensalada para el paseo de su generación. Para completar la receta le faltaron 3.6 kilogramos. ¿Cuánto dinero necesita?
24. Si 30 trabajadores construyeron una barda de 120 metros de largo en una semana de trabajo. ¿Cuántos trabajadores se requieren para que en el mismo tiempo construyan 16 metros?

Porcentaje

Concepto de porcentaje

Los números fraccionarios los podemos utilizar para conocer mejor la forma en que se comporta un conjunto de objetos o personas.

No requerimos conocer el número de personas u objetos que componen el conjunto, ya que sólo estamos interesados en saber cómo están organizados o de qué manera se relacionan entre ellos.

Ejemplo

La mitad de las pelotas son rojas, lo cual quiere decir que una de cada dos pelotas es roja. La cuarta parte de los estudiantes son hombres, o sea, uno de cada cuatro estudiantes es hombre. Una quinta parte de los deportistas son extranjeros, es decir, uno de cada cinco es extranjero.

En lenguaje matemático esto lo expresamos como:

$$\frac{1}{2} \text{ son rojas} \qquad \frac{1}{4} \text{ son hombres} \qquad \frac{1}{5} \text{ son extranjeros}$$

Con la notación decimal podemos efectuar las divisiones y obtenemos:

$$0.5 \text{ son rojas} \qquad 0.25 \text{ son hombres} \qquad 0.2 \text{ son extranjeros}$$

Notación de porcentaje

En la notación decimal es más difícil imaginarnos la relación que guardan las personas u objetos; por lo tanto, vamos a estandarizar los conjuntos suponiendo que tienen 100 elementos. Escogemos 100 porque el sistema de numeración que usamos es decimal. El número 10 y sus múltiplos: 100, 1,000, 10,000, etcétera, son números muy fáciles de operar.

La relación de los elementos se denomina *por cien* o *por ciento* y la expresamos con el símbolo %, lo cual quiere decir que cuando escribimos el símbolo % multiplicamos por 100; por ejemplo,

Por cien = Por ciento = %

Los ejemplos anteriores los expresamos de la siguiente manera:

$$0.5 \text{ son rojas} = 0.5 \times 100\% = 50\% \text{ son rojas.}$$

$$0.25 \text{ son hombres} = 0.25 \times 100\% = 25\% \text{ son hombres.}$$

$$0.2 \text{ son extranjeros} = 0.2 \times 100\% = 20\% \text{ son extranjeros.}$$

La fracción expresada en forma de porcentaje da la misma información.

Decimos que 1 de cada 2 manzanas es roja, o que 50 de cada 100 son rojas. 1 de cada 4 estudiantes es hombre, o bien, 25 de cada 100 son hombres. 1 de cada 5 deportistas es extranjero, es decir, de 100 deportistas 20, son extranjeros.

Conversión entre notación de fracción, notación decimal y porcentaje

El porcentaje es sólo una manera de expresar una relación, pero no lo podemos utilizar para hacer operaciones cuando resolvemos problemas de aplicación. Por lo tanto, es importante que desarrollemos la habilidad de hacer conversiones entre las diferentes notaciones.

Para expresar una fracción en notación decimal efectuamos la división. Cambiar de notación decimal a notación de por ciento significa multiplicar por 100%. Ahora bien, para transformar una relación expresada en por ciento a notación decimal se realiza la operación inversa: dividimos entre 100%, es decir, recorremos el punto decimal dos lugares a la izquierda y eliminamos el símbolo %.

Ejemplo

Convertir $\frac{7}{12}$ a notación de porcentaje y 37.25% a notación decimal.

Expresamos la fracción en notación decimal y multiplicamos por 100%. Para convertir de porcentaje a notación decimal dividimos entre 100%.

$$\frac{7}{12} = 0.5833 = 0.5833 \times 100\% = 58.33\%$$

$$37.25\% = \frac{37.25\%}{100\%} = 0.3725$$

Ejemplo

Convertir 83% a notación decimal.

Recordemos que la notación decimal, en la mayoría de los casos, es una manera inexacta de expresar una fracción, por lo que sólo la utilizamos en problemas de aplicación de geometría, física o química.

$$83\% = \frac{83\%}{100\%} = \frac{83}{100} = 0.83 \qquad \therefore \qquad 83\% = 0.83$$

Problemas de porcentaje

Ejemplo

En el salón de clases hay 50 estudiantes y 16 reprobaron el examen, ¿qué porcentaje de alumnos reprobaron?

Ya sabemos que 16 de 50 reprobaron, por lo que en notación de fracción y notación decimal lo expresamos de la siguiente manera:

$$\frac{16}{50} \text{ reprobaron} \qquad \rightarrow \qquad \frac{16}{50} = 0.32 \text{ reprobaron}$$

Para expresarlo en notación de porcentaje, utilizando el símbolo %, multiplicamos por 100%.

$$0.32 \text{ reprobaron} \quad \rightarrow \quad 0.32 = 0.32 \times 100\% = 32\% \text{ reprobaron}$$

Para convertir de notación decimal a notación de porcentaje multiplicamos por 100%, por lo tanto, para convertir de notación de porcentaje a notación decimal aplicamos la operación inversa, es decir dividimos entre 100%.
Recordemos que dividir entre 100 es equivalente a recorrer el punto decimal dos lugares a la izquierda.

En algunas ocasiones conocemos el porcentaje y también queremos conocer el número de objetos al que corresponde. En este caso, aplicamos el concepto de ecuación, para despejar la incógnita x.

Ejemplo

En una biblioteca hay 164 libros de matemáticas, de los cuales 25% son libros de álgebra. ¿Cuántos libros de álgebra hay?

Primero expresamos el porcentaje en notación decimal.

$$25\% = \frac{25\%}{100\%} = \frac{25}{100} = 0.25 \qquad \rightarrow \qquad 25\% = 0.25$$

El número total de libros es 164, de los cuales 25% = 0.25 son de álgebra.

Si llamamos x al número de libros de álgebra, entonces podemos expresar la relación en forma de fracción de la siguiente manera:

$$\frac{x \text{ libros de álgebra}}{164} = 0.25 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{164} = 0.25$$

Aplicamos el concepto de ecuación para obtener el valor de x.

De los 164 libros de matemáticas 41 son de álgebra, que corresponde a 25%.

$$\frac{x}{164} = 0.25 \quad \rightarrow \quad x = 0.25 \times 164 = 41$$

Las fracciones se han utilizado para conocer el porcentaje.

Así, se escribe en el numerador la parte que tomamos del total que se encuentra en el denominador.

Por ejemplo:

Estudiantes que reprobaron

$$\frac{16}{50} = 0.32 = 32\%$$

Total de estudiantes

Libros de álgebra

$$\frac{41}{164} = 0.25 = 25\%$$

Total de libros

También podemos resolver problemas cuando conocemos el porcentaje y buscamos el número total de la población.

Recordemos que cualquier número se puede expresar en forma de fracción cuando se divide entre 1. También en este caso, aplicamos el concepto de ecuación para despejar la incógnita x.

Ejemplo

Del total de los alumnos que participan en la selección deportiva de la escuela, 28 son niñas y representan 35%. ¿Cuántos alumnos en total forman la selección?

35% expresado en forma decimal es 0.35 ya que lo dividimos entre 100%. Planteamos la fracción de la siguiente manera:

Niñas en el equipo

$$\frac{28}{x} = 35\% = 0.35$$

Total de estudiantes en el equipo

Encontramos el valor de x aplicando las propiedades de una ecuación.

$$\frac{28}{x} = 0.35 \quad \rightarrow \quad \frac{28}{0.35} = x \quad \rightarrow \quad x = 80$$

El total de alumnos que componen la selección es 80.

Conversión de notación decimal a notación de fracción

La notación decimal, en la mayoría de los casos, es una forma inexacta de expresar una fracción, por lo que convertir de notación decimal a notación de fracción, no siempre resulta fácil, e incluso, en algunas ocasiones no es posible obtener una única respuesta.

No es de gran utilidad expresar un número decimal en forma de fracción; sin embargo, es importante estudiar esta estrategia aritmética para desarrollar nuestro ingenio y habilidad en el manejo de las ecuaciones, las fracciones y los números decimales.

Para convertir de notación decimal a notación de fracción utilizamos el concepto que dice que multiplicar y dividir un número por la misma cantidad diferente de cero no altera su valor.

Para multiplicar y dividir por la misma cantidad en la mayoría de los casos utilizamos 100, 1,000, etcétera, porque son números de fácil operación.

Ejemplo

Convertir 0.25 a notación de fracción.

Creamos una fracción multiplicando y dividiendo 0.25 por 100.

$$0.25 = \frac{0.25 \times 100}{100} = \frac{25}{100}$$

De hecho, ya hemos convertido 0.25 en notación de fracción; sin embargo, al hacer dos simplificaciones, dividiendo entre 5 el numerador y el denominador, podemos obtener fracciones equivalentes.

$$\frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \qquad \rightarrow \qquad 0.25 = \frac{25}{100} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$$

Ejemplo

Convertir 0.12 a notación de fracción.

Creamos una fracción multiplicando y dividiendo 0.12 por 100. Luego simplificamos para obtener las fracciones equivalentes.

$$0.12 = \frac{0.12 \times 100}{100} = \frac{12}{100} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

$$0.12 = \frac{12}{100} = \frac{6}{50} = \frac{3}{25}$$

Ejemplo

Convertir 0.125 a notación de fracción.

Creamos una fracción multiplicando y dividiendo 0.125 por 1,000. Luego simplificamos para obtener las fracciones equivalentes.

$$0.125 = \frac{0.125 \times 1{,}000}{1{,}000} = \frac{125}{1{,}000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

$$0.125 = \frac{125}{1{,}000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo

Convertir 0.33 a notación de fracción.

Creamos una fracción multiplicando y dividiendo 0.33 por 100.

$$0.33 = \frac{0.33 \times 100}{100} = \frac{33}{100} \qquad \rightarrow \qquad 0.33 = \frac{33}{100}$$

Ahora bien, $\frac{1}{3}$ también genera 0.33 en notación decimal.

Ejemplo

Convertir 0.785 a notación de fracción.

Creamos una fracción multiplicando y dividiendo 0.785 por 1,000. Luego simplificamos para obtener la fracción equivalente.

$$0.785 = \frac{0.785 \times 1{,}000}{1{,}000} = \frac{785}{1{,}000} = \frac{157}{200}$$

$$0.785 = \frac{785}{1{,}000} = \frac{157}{200}$$

Serie de Ejercicios 5

Convertir los siguientes números de notación decimal a notación de fracción.

1. 0.5	**2.** 0.625	**3.** 0.35	**4.** 0.36	**5.** 0.4	**6.** 0.75
7. 0.875	**8.** 0.139	**9.** 0.92	**10.** 0.375	**11.** 0.84	**12.** 0.191
13. 0.6	**14.** 0.65	**15.** 0.85	**16.** 0.8	**17.** 0.954	**18.** 0.95
19. 0.666	**20.** 0.2	**21.** 0.88	**22.** 0.786	**23.** 0.55	**24.** 0.96

Serie de Ejercicios 6

Resolver los problemas.

1. En una escuela hay 728 alumnos de los cuales 43% son niños. ¿Cuántas niñas hay en total?

2. Una bicicleta cuesta $624 y tiene el 18% de descuento. ¿Cuál es el precio neto?

3. Cerca de 18% del peso de un ser humano es hueso. ¿Cuánto pesa el esqueleto de una persona de 60 kg?

4. Del peso completo del ser humano, 62% es debido al agua que contiene. ¿Cuál es el peso del agua de una persona de 82 kg?

5. El peso de la grasa contenida en el cuerpo de un niño de 48 kg es 7.2 kg. ¿Qué porcentaje del peso total es debido a la grasa?

6. La pestaña de un ser humano vive aproximadamente 150 días. ¿Qué porcentaje de un año vive la pestaña?

7. Si la renta de una casa aumenta de $2,500 a $4,000. ¿En qué porcentaje se incrementó?

8. Un par de tenis cuesta $320 y un par de zapatos $480. ¿En qué porcentaje los tenis son más baratos que los zapatos y en qué porcentaje los zapatos son más caros que los tenis?

9. Tres amigos anotaron un total de 67 goles en el campeonato regional de futbol. Juan anotó 16, Arturo 21 y el resto Luis. ¿Qué porcentaje del total de goles anotó Luis?

10. Verónica pagó $1,491.75 incluyendo el impuesto por un vestido nuevo. Si el precio de lista del vestido es $1,326.00. ¿Qué porcentaje es el impuesto?

11. En una escuela hay un total de 728 alumnos. En las elecciones para el representante de estudiantes, 342 votaron por Andrés y el resto por Gabriela. ¿Qué porcentaje de alumnos votó por Andrés y qué porcentaje por Gabriela?

12. Carmen ahorró $17,490 para comprar un carro. Este dinero es 68% del costo total. ¿Cuánto más tiene que ahorrar?

13. En este ciclo escolar, 121 alumnos de tercero de secundaria pasarán a la preparatoria. Este número representa 63% de los estudiantes de segundo de secundaria. ¿Cuántos alumnos de segundo pasarán a tercero?

14. Un crucero debe recorrer 1,649 kilómetros. El primer día recorre 21% de la distancia total y el segundo día 28% de la distancia que le falta. Al empezar el tercer día, ¿qué distancia tiene que cubrir aún?

15. Una tienda anuncia que ofrece un descuento de 12% más 10%. Si compramos una bicicleta de $2,148.00, ¿cuánto ahorramos? Pero, si en lugar de 12% más 10% ofreciera 22%. ¿Cuánto ahorraríamos?

16. Un par de zapatos cuesta $742.00 menos 20% de descuento. Si compramos dos pares del mismo precio nos ofrecen 25%. ¿Cuál es la diferencia en el ahorro por par de zapatos, si compramos un par o si compramos dos?

17. Este año se inscribieron en el coro de la escuela 85 alumnos, lo cual representa 125% de los alumnos que se inscribieron el año pasado. ¿Cuántos se inscribieron el año pasado?

18. De los 78 integrantes de la banda de guerra de la escuela 47 tocan el tambor. ¿Qué porcentaje representa del total?

19. Un ferrocarril debe recorrer un total de 2,729 km. El primer día cubre 642 km. El segundo día cubre 22% de la distancia que le faltaba. Al empezar el tercer día, ¿qué porcentaje de la distancia total aún le falta?

20. Compramos un total de $628.00 en comida, de los cuales gastamos $249.00 en carne y pescado. El resto del dinero es para fruta y verduras. ¿Qué porcentaje gastamos en verduras y fruta?

21. Del total de alumnos de sexto de primaria 30% reprobó matemáticas. Si los reprobados fueron 18, ¿cuántos alumnos hay en sexto?

22. De acuerdo con el censo nacional, el número de habitantes en un poblado decreció de 7,149 a 5,624 en los últimos 10 años. ¿En qué porcentaje decreció la población?

23. Cristina es una vendedora de productos de belleza. Cada mes recibe 8% de comisión del total de las ventas si no exceden de $75,000.00, y 12% si las ventas son superiores a $75,000.00. En el mes de septiembre ganó $10,020.00. ¿Cuáles fueron sus ventas totales?

24. La renta de un departamento es de $5,300.00. El dueño aumenta la renta y el nuevo costo representa 112% del costo anterior. ¿Cuál es el monto de la nueva renta?

Promedio

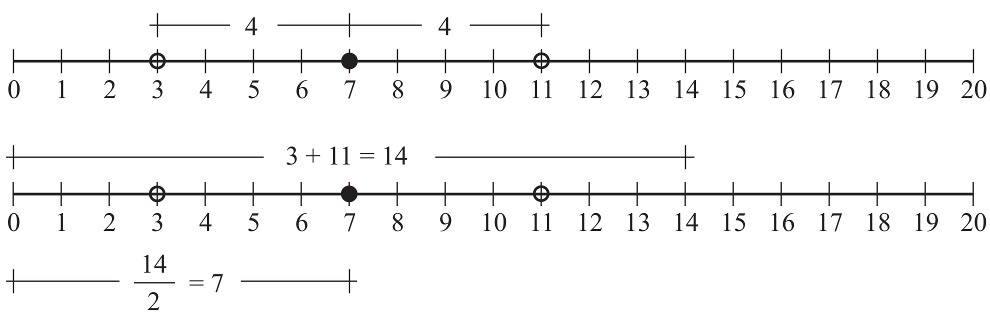
Concepto de promedio

El promedio de dos números es el número que se encuentra a la misma distancia de ambos.

También podemos decir que el promedio es el punto que está en medio.

Ejemplo

Calcular el promedio de 3 y 11.

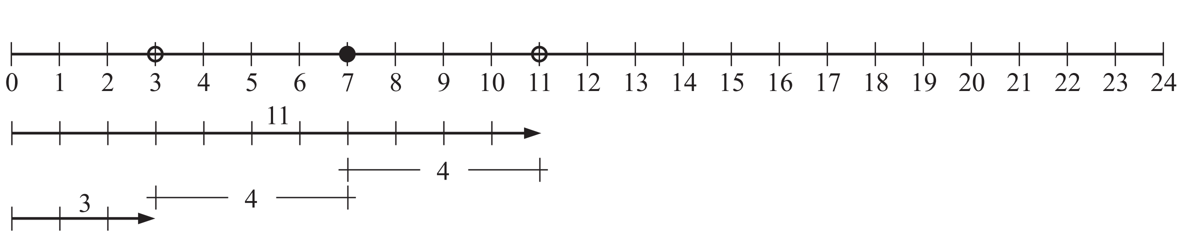


El promedio es 7 porque la distancia entre 7 y 11 es 4 y la distancia entre 7 y 3 también es 4.

$$\text{Promedio}_{3\text{ y }11} = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

El promedio es la cifra que se encuentra a la misma distancia de los números que lo generan, sin importar de qué números se trata.

La manera más fácil de comprobar este concepto, cuando más de dos números están involucrados en el promedio, es utilizando vectores.



Cuando tenemos más de dos números y queremos conocer el promedio, seguimos el mismo procedimiento. Sumamos todos los números y los dividimos entre el total de números.

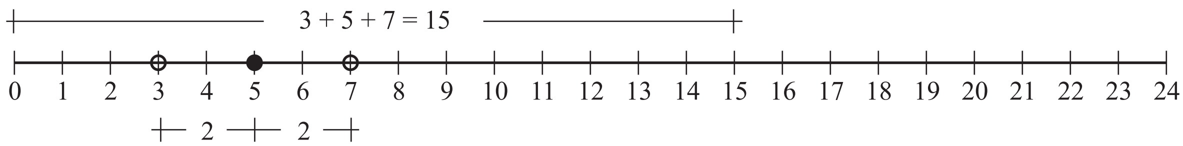
$$\text{Promedio} = \frac{\text{Suma total del tamaño de cada uno de los números}}{\text{Total de números}}$$

Ejemplo

Ejemplificar el promedio de tres números utilizando 3, 5, 7.

El promedio lo calculamos sumando todos los números y el resultado lo dividimos entre el total de números.

$$\text{Promedio}_{3,\,5\text{ y }7} = \frac{3+5+7}{3} = \frac{15}{3} = 5$$



El promedio es el número que está entre el número más pequeño y el más grande y se encuentra a la misma distancia a la izquierda y a la derecha de los números que lo generan.

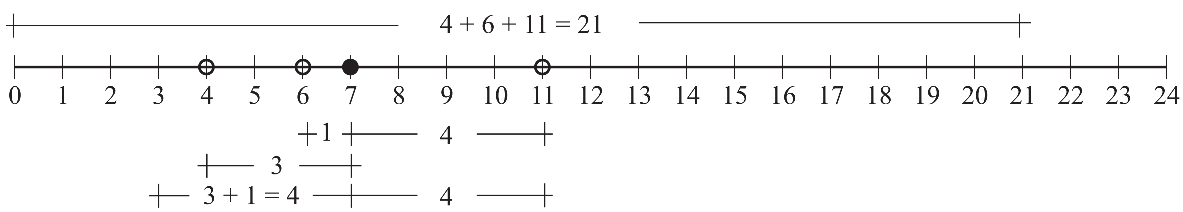
El promedio se encuentra entre 3 y 7 y debe estar a la misma distancia de ambos. En este caso, el promedio coincide con el número 5.

Ejemplo

Ejemplificar el promedio de tres números utilizando 4, 6, 11.

El promedio lo calculamos sumando todos los números y el resultado lo dividimos entre el total de números.

$$\text{Promedio}_{4,\,6\text{ y }11} = \frac{4+6+11}{3} = \frac{21}{3} = 7$$



Cuando tenemos más de dos números, cada uno de ellos contribuye a la distancia total que forman, de acuerdo a su tamaño

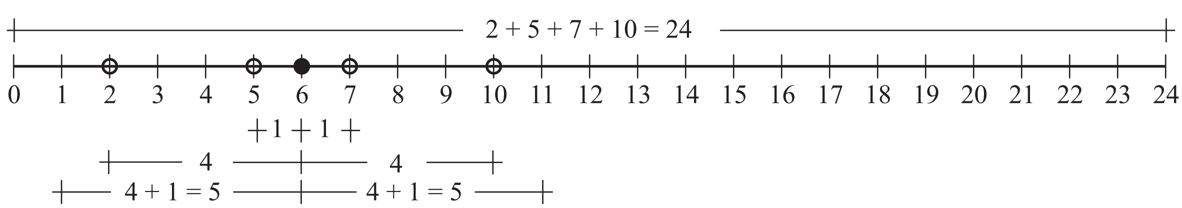
Sumamos la distancia a la cual se encuentran los números a la izquierda y a la derecha del promedio.

Ejemplo

Ejemplificar el promedio utilizando 2, 5, 7 y 10.

El promedio lo calculamos sumando todos los números y el resultado lo dividimos entre el total de números.

$$\text{Promedio}_{2,\,5,\,7\text{ y }10} = \frac{2+5+7+10}{4} = \frac{24}{4} = 6$$



Ejemplo

Calcular el promedio de 3, 8 y 10.

El promedio lo calculamos sumando todos los números y el resultado lo dividimos entre el total de números.

$$\text{Promedio}_{3,\,8\text{ y }10} = \frac{3+8+10}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Ejemplo

En una secundaria hay 5 grupos. El número de alumnos que hay en cada grupo es: 23, 48, 39, 27 y 32. ¿Cuántos alumnos se deben admitir para formar un nuevo grupo, si el promedio de alumnos por grupo debe ser de 34?

Primero calculamos el número total de alumnos que hay en la secundaria.

Número de alumnos = 23 + 48 + 39 + 27 + 32 = 169

Si ahora hay 6 grupos y queremos que el promedio sea 34 alumnos por grupo, el número total de alumnos: NT, lo dividimos entre 6 para calcular el promedio.

$$\text{Promedio} = \frac{\text{NT}}{6} = 34$$

Resolvemos la ecuación y obtenemos el número total de alumnos que la secundaria debe tener.

$$\frac{\text{NT}}{6} = 34 \quad \rightarrow \quad \text{NT} = 34 \times 6 \quad \rightarrow \quad \text{NT} = 204$$

El número de alumnos que se deben admitirse para formar el sexto grupo es:

Número de alumnos en el sexto grupo = 204 − 169 = 35

Serie de Ejercicios 7

Resolver los problemas.

1. Las calificaciones de matemáticas de Arturo son: 5, 8, 9, 9, 4, 10, 6. El promedio de las calificaciones de María es 23% mayor al promedio de las de Arturo. ¿Cuál es el promedio de las calificaciones de María?
2. En la competencia de carreras de la escuela, el tiempo en minutos que siete alumnos hicieron en dar una vuelta completa a la pista fue de: 3.2, 3.9, 4.5, 3.6, 4.2, 3.7, 4.4. El promedio de tiempo que cuatro maestros tardaron en recorrer la misma distancia fue 15% menor que el de los alumnos. ¿Cuánto les tomó en promedio a los maestros dar la vuelta a la pista?
3. Cuatro alumnos de la escuela invirtieron dinero en un negocio. Juan $4,000, Teresa $2,500, Luis $5,300 y José $3,700. La ganancia total fue de 25% sobre el promedio del capital invertido. Si reparten las ganancias de acuerdo a la cantidad invertida, ¿cuánto le tocó a cada uno de utilidad?
4. El número de alumnos que los salones de la secundaria tienen es: 43, 28, 37, 39, 32, 25, 35, 41. Si los grupos de la primaria en promedio tienen 20% menos estudiantes que el promedio de alumnos por salón de la secundaria, ¿cuántos alumnos en promedio tienen los salones de la primaria?
5. Los alumnos realizan actividades para juntar dinero y adornar los salones de clase. El total recabado por los grupos es: Grupo A $125, Grupo B $220, Grupo C $180, Grupo D $164, Grupo E $258, Grupo F $175. La escuela da una contribución adicional de 85% del promedio del dinero de todos los grupos. El dinero donado por la escuela se reparte de acuerdo al porcentaje del total juntado que cada grupo contribuyó. ¿Cuánto le toca a cada grupo?
6. En los últimos cuatro exámenes de matemáticas las calificaciones de Mario son: 67, 85, 92, 56. ¿Cuánto debe sacar en el siguiente examen si quiere que su promedio final sea 80?
7. El número de vuelos que llega a un aeropuerto a las horas pico son:

   De las 4:00 pm a las 5:00 pm 137 vuelos
   De las 5:00 pm a las 6:00 pm 192 vuelos
   De las 6:00 pm a las 7:00 pm 154 vuelos
   De las 7:00 pm a las 8:00 pm 89 vuelos

   ¿Cuál es el promedio de vuelos por hora?
8. El promedio del número de alumnos por escuela de la zona es de 532. Si el número total de alumnos en la zona es de 3,724. ¿Cuántas escuelas hay?
9. El servicio metereológico reportó que el promedio de temperatura en la segunda semana del mes de enero a las 6:00 am en la Ciudad de México fue de 3° C. La temperaturas que logramos medir en el laboratorio de física de la escuela son:

   Lunes 2.4° C
   Martes 3.4° C
   Miércoles 2.8° C
   Jueves 2.2° C
   Viernes 2.3° C
   Sábado 3.7° C

   ¿Cuál fue la temperatura el domingo?

Interés

Porcentaje y capital

Aplicando las propiedades de una ecuación, despejamos las fórmulas para calcular el capital C y el porcentaje P:

$$I = C \times P \quad \rightarrow \quad C = \frac{I}{P} \quad \rightarrow \quad P = \frac{I}{C}$$

Ejemplo

Solicitamos un préstamo de \$23,400 al banco y nos cobran \$2,925 de interés. ¿A qué porcentaje nos prestaron el dinero?

El capital total C que solicitamos es: $C = \$23{,}400$
El interés I que nos cobraron es: $I = \$2{,}925$

El porcentaje P del préstamo es:

$$P = \frac{I}{C} = \frac{2{,}925}{23{,}400} = 0.125 \quad \rightarrow \quad P = 0.125 \times 100\% = 12.5\%$$

Ejemplo

Si el banco paga 8.75% de interés anual en una cuenta de ahorros. ¿Cuánto dinero necesitamos depositar, si al final del año queremos ganar \$3,820 en intereses?

El porcentaje P que el banco paga es: $P = 8.75\%$
El interés I que queremos ganar es: $I = \$3{,}820$

$$P = 8.57\% = \frac{8.75\%}{100\%} = 0.0875$$

El capital total C que debemos ahorrar es:

$$C = \frac{I}{P} = \frac{3{,}820}{0.0875} = 43{,}657 \quad \rightarrow \quad C = \$43{,}657$$

Interés compuesto

El interés compuesto es la cantidad de dinero que pagamos o recibimos sobre un determinado periodo de tiempo, tomando en cuenta que el capital se va incrementando debido a los intereses acumulados.

Calcular el interés compuesto es equivalente a encontrar el interés simple cada vez que se vence el tiempo de acumular los intereses ganados o pagados. Para hacerlo podemos construir una tabla.

Ejemplo

Depositamos \$10,000 en un banco que paga un interés mensual compuesto de 5%. ¿Cuánto dinero tendremos después de 6 meses?

Depositamos \$10,000 en un banco que paga un interés mensual compuesto de 5%. ¿Cuánto dinero tendremos después de 6 meses?

Entonces, calculamos el interés I que cada mes va generando el capital principal C, lo sumamos y obtenemos el nuevo capital C_{Nuevo} que usamos para conocer el interés del siguiente mes.

Periodo	**Porcentaje Mensual** $\boldsymbol{P}$	**Capital Principal** $\boldsymbol{C}$	**Interés Mensual** $\boldsymbol{I = C \times P}$	**Nuevo Capital Principal** $\boldsymbol{C_{\text{Nuevo}} = C + I}$
Primer mes	$P = 0.05$	$C = 10{,}000$	$10{,}000 \times 0.05 = 500$	$10{,}000 + 500 = 10{,}500$
Segundo mes	$P = 0.05$	$C = 10{,}500$	$10{,}500 \times 0.05 = 525$	$10{,}500 + 525 = 11{,}025$
Tercer mes	$P = 0.05$	$C = 11{,}025$	$11{,}025 \times 0.05 = 551$	$11{,}025 + 551 = 11{,}576$
Cuarto mes	$P = 0.05$	$C = 11{,}576$	$11{,}576 \times 0.05 = 579$	$11{,}576 + 579 = 12{,}155$
Quinto mes	$P = 0.05$	$C = 12{,}155$	$12{,}155 \times 0.05 = 608$	$12{,}155 + 608 = 12{,}763$
Sexto mes	$P = 0.05$	$C = 12{,}763$	$12{,}763 \times 0.05 = 638$	$12{,}763 + 638 = 13{,}401$

Después de 6 meses, el nuevo capital que tenemos es \$13,401.00

Serie de Ejercicios 8

Resolver los problemas.

1. Javier solicitó un préstamo con un interés simple anual de 8.6%. Al final del año pagó \$3,010.00 en intereses. ¿Cuánto dinero le prestaron?
2. Depositamos \$5,000.00 en un banco que paga 11.25% de interés simple anual. Después de 1 año, ¿cuánto dinero tenemos?
3. Un banco paga 8.75% de interés simple anual. Si depositamos \$8,000.00, ¿cuánto dinero tendremos al terminar el segundo año?
4. El precio de lista de un carro es de \$47,500.00. El precio en abonos pagándolo en un año es de \$60,325.00. ¿Cuál es la tasa de interés?
5. Gregorio solicitó un préstamo por un año y debe pagar los intereses por adelantado. La tasa de interés simple es de 12.5% anual. Si cuenta con \$3,100.00, ¿cuánto dinero puede pedir prestado?
6. Un grupo de cuatro personas invirtieron \$527,800.00 en una compañía constructora. Al terminar el año cada uno recibió \$21,375.90 de intereses. Si todos invirtieron la misma cantidad, ¿cuál es la tasa de interés?
7. La familia Sánchez invierte \$58,500.00 en un banco que paga 18.3% de interés simple anual. ¿Cuánto dinero tendrá al terminar el cuarto año?
8. ¿Cuánto dinero debemos invertir en una compañía que paga 12% de interés simple anual, si al término del segundo año queremos ganar \$44,334.00 en intereses?
9. La caja de ahorros de una compañía paga un interés simple anual. Si invertimos \$38,500.00 y al término del tercer año recibimos \$17,325.00 de intereses, ¿cuál es la tasa de interés?
10. Un agiotista presta dinero con 8.5% de interés simple mensual. Bartolo pide prestados \$5,000.00 por 6 meses. ¿Cuánto tiene que pagar en intereses?
11. Andrés invierte \$5,000,00 en un banco que ofrece 3% de interés compuesto mensual. ¿Cuánto dinero tiene al terminar el primer año?
12. Un banco paga 5% de interés compuesto mensual. Si invertimos \$2,300.00, ¿cuánto dinero ganaremos de intereses en 9 meses?

Material Didáctico

Raíz cuadrada

Cartulina 1

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Raíz cuadrada

Cartulina 2

1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1
1	1	1	1

Raíz cuadrada

Cartulina 3

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

$\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$