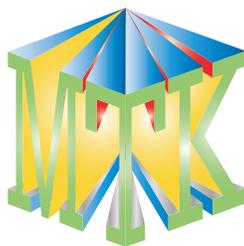


# Álgebra 1

Incluye Proporciones, Porcentaje e Interés  
Séptimo y Octavo Niveles de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



# **Álgebra 1**

Octavo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2020

# Contenido

## Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	vii
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	vii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Cómo está organizado el libro	viii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Nuestra página en Internet	viii

## Capítulo 1

### Las Cuatro Dimensiones de los Números

Los números naturales	11
-----------------------	----

### Números Enteros y Fraccionarios

Los números enteros positivos	12
Los números primos	12
Teorema fundamental de la aritmética	13
Factores primos de números reales	13
Los números reales positivos pueden operarse	14
Los números fraccionarios positivos	15
Concepto de fracción	15
Concepto de unidad de un número fraccionario	15
Los números fraccionarios positivos	15
La unidad de una fracción puede ser simple o compuesta	16
Fracciones equivalentes	17
Propiedad de las fracciones equivalentes	17
Simplificación de fracciones	18
Fracciones propias	19
Fracciones impropias	19
Notación mixta de una fracción impropia	20

### Suma y Resta Aritmética de Fracciones

Concepto de la suma y resta aritmética de fracciones	24
Algoritmo para calcular el mínimo común denominador	26
Suma y resta de fracciones usando el método tradicional	27

### Multiplicación y División de Fracciones

Concepto de la multiplicación de fracciones	30
Concepto de la división de fracciones	32
Primera estrategia para la división de fracciones	33
Segunda estrategia para la división de fracciones	33

<b>La Recta de los Números Reales Positivos</b>	
Notación decimal de fracciones	35
Número decimal expresado como una fracción	37
Propiedades de la recta de los números reales positivos	38
Números racionales	39
Números irracionales	39
<b>Construcción de los Números Reales Positivos</b>	
Materia prima	41
Números no primos	41
Números primos	41
Números fraccionarios o racionales	42
Números irracionales	42
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Conjuntos</b>	
Definición de conjunto	45
Notación de conjunto	45
Representación de los elementos de un conjunto	45
Conjunto universo	45
Conjunto de los números naturales y enteros positivos	45
Conjunto de los números naturales y enteros positivos	46
El conjunto vacío	46
Subconjunto	46
Definición de variable	47
Notación de conjunto usando una variable	47
Unión de conjuntos	47
Intersección de conjuntos	47
<b>Orden en la Ejecución de las Operaciones</b>	
Los paréntesis	50
Uso de los paréntesis	50
El paréntesis indica el orden en el que debemos realizar las operaciones	50
<b>Los Números Tienen su Imagen</b>	
En álgebra ya no restamos, solamente sumamos	52
La recta de los números reales	52
En álgebra el cero indica la bisagra de la recta de los números reales	52
El signo menos (-) significa la imagen a espejo del número	53
El signo (+) indica la operación suma	54
Los números negativos en álgebra	54
Ejercicios con el material didáctico	54
<b>Multiplicación y División de Números Reales</b>	
Buscar las imágenes a espejo de los números reales	55
Regla de la multiplicación de signos	55
Regla de la división de signos	57
El signo negativo en los números fraccionarios	57
Multiplicación de números reales fraccionarios	58
División de números reales fraccionarios	58
<b>Suma de Números Reales</b>	
Las distancias también tienen imagen a espejo	60
Representamos las distancias con una flecha que se llama vector	60
Suma de distancias del mismo signo o de vectores en el mismo sentido	60
Suma de distancias negativas con distancias positivas o suma de vectores en sentido contrario	61
Suma algebraica de números fraccionarios	63
Suma algebraica de números fraccionarios de igual denominador	63
Suma algebraica de números fraccionarios	64
Suma algebraica de números fraccionarios combinada con multiplicaciones y divisiones	66

## Capítulo 3

Algebra	71
Con las letras creamos fórmulas	71
<b>Las Letras Representan Números y Dimensiones</b>	
Las letras representan dimensiones	72
Suma de dos o más letras diferentes	73
Suma de la misma letra varias veces	73
Suma de grupos de la misma letra o de vectores de la misma magnitud	74
El coeficiente de una letra	74
La ley conmutativa	75
Suma de grupos de letras diferentes	75
Procedimiento para sumar grupos de letras diferentes	75
Multiplicación de un número por una letra o un grupo de la misma letra	76
Suma combinada con la multiplicación de un número por un grupo de letras	76
La ley distributiva	78
Suma de grupos de letras combinada con la ley distributiva	78
La ley asociativa	79
La imagen de una magnitud o de una distancia	80
Suma de grupos diferentes de letras negativas	81
Suma de grupos de la misma letra positivos y negativos	82
Factorización del signo menos	82
La multiplicación de dos letras	85
Multiplicación de una letra por sí misma	85
La imagen de la multiplicación de dos letras	85
<b>Las Letras Representan Áreas</b>	
Suma del producto de dos letras o suma de áreas	86
Procedimiento para sumar áreas y vectores ambos positivos y negativos	88
El producto de tres letras representa un volumen	90
Multiplicación de una letra por sí misma tres veces	90
La multiplicación de tres letras representa un prisma rectangular	90
La imagen de un volumen	90
<b>Las Letras Representan Volúmenes</b>	
Suma del producto de tres letras o suma de volúmenes	91
Procedimiento para sumar volúmenes, áreas y vectores positivos y negativos	92

## Capítulo 4

<b>El Concepto de Ecuación</b>	
Definición de ecuación	97
Solución o raíz de una ecuación	98
El concepto de ecuación es una de las propiedades básicas del álgebra	98
<b>Propiedades Básicas de Una Ecuación</b>	
Las ecuaciones tienen constantes y variables o incógnitas	100
La ecuación no cambia si lo que le hacemos del lado izquierdo lo hacemos del lado derecho	100
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de la incógnita	101
<b>Ecuaciones de Primer Grado</b>	
Definición de ecuación de primer grado o lineal	103
Solución analítica de una ecuación de primer grado	103
Regla para los números y letras positivas y negativas que se encuentran sumando	104
Regla para los números y letras positivas y negativas que se encuentran sumando	105
Procedimiento para resolver ecuaciones de primer grado	106
<b>Gráfica de una Ecuación Lineal</b>	
La variable dependiente y la variable independiente	110
La relación que guardan la variable dependiente y la independiente definen la gráfica	110
Sistema coordenado cartesiano	111
Pares ordenados $(x, y)$	112
Tabulación de una ecuación lineal	113
El modelo matemático para resolver un problema	115
Problemas relacionados con números	115

## Problemas de Aplicación de Ecuaciones Lineales

Problemas misceláneos

117

## Capítulo 5

### Proporciones

Concepto de proporcionalidad	125
Rectas proporcionales	125
Figuras geométricas proporcionales o semejantes	126
Cuadrado	126
Rectángulo	127
Triángulo	128
Las proporciones son ecuaciones	130
Las fracciones equivalentes representan proporciones	133
Las proporciones las podemos plantear como fracciones	134
Primera aplicación de las proporciones. Regla de tres	134
Las proporciones son ecuaciones	134
Segunda aplicación de las proporciones. Razón	135
Tercera aplicación de las proporciones. Distribución proporcional	137

### Porcentaje

Concepto de porcentaje	140
Notación de porcentaje	140
Conversión entre notación de fracción, notación decimal y porcentaje	141
Problemas de porcentaje	141
Conversión de notación decimal a notación de fracción	142

### Promedio

Concepto de promedio	145
----------------------	-----

### Interés

Porcentaje y capital	148
Interés compuesto	148

## Apéndice 1

### Respuestas de las Series de Ejercicios

Capítulo 1	153
Capítulo 2	156
Capítulo 3	159
Capítulo 4	163
Capítulo 5	166

## Apéndice 2

### Material Didáctico Complemento del Libro

La Recta de los Números Reales	169
Suma de Números Positivos y Negativos	173
Suma y Multiplicación Algebraica	177

# Introducción

## La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

## La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

### 1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

### 2. Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

### 3. Demostrar o verificar que lo entendido es cierto

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

### 4. Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

### 5. Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

## Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

## Objetivo del libro

El objetivo de este libro es cubrir el octavo nivel de abstracción en la espiral ascendente del conocimiento matemático. Este nivel comprende los conceptos básicos que estructuran el álgebra.

En este libro descubrimos, que el universo numérico es mucho más amplio que los números positivos que estudiamos en aritmética, ya que ahora contamos con sus imágenes o números negativos. Usar letras amplía nuestro vocabulario matemático y el concepto de ecuación, abre un nuevo horizonte que nos permite resolver un número infinito de problemas. Ya no hay límite para nuestra creatividad.

## Cómo está organizado el libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

### **Aritmética. Séptimo nivel de abstracción**

#### *Capítulo 1.*

Suma, multiplicación y división de fracciones. El teorema fundamental de la aritmética y la recta de los números reales que incluye números racionales e irracionales.

### **Álgebra básica. Octavo nivel de abstracción**

#### *Capítulo 2 al 4.*

Inicia con una breve presentación de la nomenclatura utilizada en la teoría de los conjuntos, la cual usamos a lo largo del texto.

Apoyados en la original estrategia pedagógica del espejo de la recta de los números reales, estudiamos los números negativos y su aplicación en las tres operaciones básicas del álgebra: suma, multiplicación y división. Aplicamos este conocimiento al estudiar el concepto de ecuación, la solución de ecuaciones de primer grado y los problemas de aplicación de estas ecuaciones.

### **Conceptos selectos de matemáticas.**

#### **Aplicación del concepto de ecuación**

#### *Capítulo 5.*

Utilizando el concepto de ecuación y las estrategias matemáticas aprendidas, resolvemos problemas de: proporciones, porcentaje, promedio e interés y distribución proporcional.

## Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brinco y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

## Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: [www.mathematike.org](http://www.mathematike.org).

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.