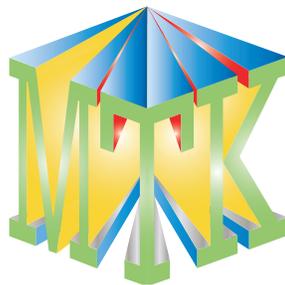


Trigonometría

Duodécimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Trigonometría
Duodécimo Nivel de Abstracción
José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV
Prohibido Reproducir
Todos los Derechos Reservados
Impreso en México
2020

Contenido

Introducción

Pedagogía de los cinco pasos	vii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Nuestra página en Internet	viii

Capítulo 1

Elementos de Geometría

Geometría	11
Punto	11
Recta	11
Plano	11
Espacio	12

Figuras Geométricas Planas

Figuras geométricas planas	13
Polígonos	13
El círculo y la elipse	13
Clasificación de las figuras geométricas planas	13
Tipos de polígonos de acuerdo al tamaño de sus lados	13
Tipos de polígonos de acuerdo al número de sus lados	14
Clasificación de los cuadriláteros	14
Clasificación de los triángulos de acuerdo al paralelogramo del que proceden	15
Clasificación de los triángulos de acuerdo al tamaño de sus lados	16
Figuras geométricas planas	16
Perímetro de un triángulo	17
Perímetro de polígonos	17
Área de cuadrados, rectángulos y romboides	17
Perímetro de un triángulo	18
Área de polígonos	19
Perímetro de círculos	19
El número π es la relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo	19
Área de círculos	20

Simetría

Concepto de simetría	22
----------------------	----

Capítulo 2

Ángulos y Triángulos

Rayos	27
Definición de ángulo	27
Forma de medir los ángulos	27

Rectas y ángulos	29
Clasificación de los triángulos de acuerdo a sus ángulos internos	31
Clasificación de los triángulos de acuerdo a la longitud de sus lados	31
Suma de los ángulos internos de un triángulo	31
Triángulos congruentes	32
Rectas proporcionales	32
Triángulos semejantes	33
Los grados es una unidad de medición sexagesimal	35
El radián es otra unidad para medir ángulos	36
Definición de radián	36
Letras del alfabeto griego	38

Capítulo 3

Triángulos Rectángulos

Notación de los triángulos rectángulos	41
--	----

Triángulos Rectángulos

Enunciado del Teorema de Pitágoras	42
Demostración del Teorema de Pitágoras	43

Plano Cartesiano y Círculos

Plano coordenado	47
Definición de círculo	47
Ecuación del círculo	48
Ecuación del círculo con centro en el origen	48
Ecuación del círculo con centro en $C(\alpha, \beta)$	48
Ecuación general del círculo	49
Tangente al círculo	50

Capítulo 4

Relaciones Trigonométricas

Definición de relación trigonométrica en un triángulo rectángulo	55
Triángulos amigables	56
Relación seno	56
Construcción de la tabla de la relación seno	57
Relación inversa de la relación seno	59
Tabla de valores de la relación seno	60
Relación coseno	61
Relación entre la relación seno y la relación coseno	62
Construcción de la tabla de la relación coseno	63
Comportamiento de las relaciones seno y coseno	63
Gráfica de las relaciones seno y coseno	64
Relación inversa de la relación coseno	64
Algunas relaciones entre las relaciones seno y coseno	67
Relación tangente	69
Tabla de la relación tangente	71
La división entre cero no existe	71
Gráfica de la relación tangente	72
Comparación de las gráficas de las relaciones seno, coseno y tangente	72
Relación inversa de la relación tangente	72
Las relaciones cosecante, secante y cotangente	74
Gráfica de las relaciones cosecante, secante y cotangente	75
Relación entre las relaciones tangente, cosecante, secante y cotangente	76

Capítulo 5

Identidades Trigonométricas

Las seis relaciones trigonométricas	81
Las seis relaciones trigonométricas	81
Valores de las relaciones trigonométricas	83

Geometría de los Triángulos	
Elementos de un triángulo	86
Área de un triángulo no rectángulo	87
La ley de los senos	89
La ley de los cosenos	90
La fórmula de Herón para calcular el área de un triángulo cualquiera	92

Capítulo 6

Concepto de Función

Funciones trigonométricas	97
Concepto de ecuación y de función	97
Primer aproximación: la función como la relación entre dos conjuntos	97
Segunda aproximación: la función como una igualdad	100
Tercer aproximación: la función como un operador	101
Prueba para verificar si una ecuación es función o relación	102
Definición de función	104
Notación de función	104

Concepto de Función Inversa

Función inversa	106
Notación de función y función inversa	107
Relación que las gráficas de la función y de su función inversa guardan	108
Prueba para verificar si una función tiene función inversa	111
Criterio para verificar si una función tiene función inversa	111

Capítulo 7

Funciones Trigonométricas

Un punto en un círculo	117
Análisis de las gráficas de las funciones trigonométricas seno y coseno	120
Funciones trigonométricas inversas seno y coseno	122
Funciones trigonométricas inversas seno y coseno	122
Las funciones seno y coseno son periódicas	123
La frecuencia de las funciones seno y coseno	124
La amplitud de las funciones seno y coseno	125
Mover horizontalmente las funciones seno y coseno	125
Mover verticalmente las funciones seno y coseno	125
Las funciones tipo sinusoidal	126
La función trigonométrica tangente	126
La función trigonométrica inversa tangente	127
Funciones trigonométricas recíprocas	127
Dominio y rango de las funciones trigonométricas	128

Más Identidades Trigonométricas

Identidades de la suma de ángulos	129
Identidades del ángulo doble	132
Identidades del ángulo mitad	134

Capítulo 8

Ecuaciones Trigonométricas

Concepto de ecuación	139
Ecuaciones trigonométricas	139

Apéndice 1

Respuestas Series de Ejercicios

Capítulo 1	151
Capítulo 2	151
Capítulo 3	152
Capítulo 4	153
Capítulo 5	154

Capítulo 6	155
Capítulo 7	155
Capítulo 8	156
Tabla de las funciones seno, coseno y tangente	158
Tabla de las funciones seno, coseno y tangente	159

Apéndice 2

Teorema de Pitágoras. Primera Demostración	163
Teorema de Pitágoras. Segunda Demostración	165
Teorema de Pitágoras. Tercera Demostración	167
Teorema de Pitágoras. Cuarta Demostración	169
Teorema de Pitágoras. Quinta Demostración	171
Relaciones Trigonómicas	173

Introducción

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera. Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta pedagogía ha sido enriquecida utilizando la epistemología de Bernard Lonergan.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

Pedagogía de los cinco pasos

1. *Contextualizar el conocimiento.*
2. *Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos, para permitirle al estudiante entender el concepto.*
3. *Demostrar o verificar que lo entendido es cierto.*
4. *Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad al usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.*

Explicitar claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y colocarlo sobre la espiral ascendente del conocimiento. Verificar que el estudiante ya se ha apropiado de los conceptos previos necesarios y saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos, que para poder formar una barda, se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utilizando sus sentidos, debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto, para que extrayendo datos inquiera e imagine y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y por lo tanto entender.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas, hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

Cuando el alumno ha entendido y por lo tanto, ha podido formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que ha entendido es verdadero. El estudiante utilizando el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto dándose así en él o ella la comprensión total.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno construya el algoritmo correspondiente, sino que también, es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. *Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido.*

La evaluación la hacemos en dos sentidos. Primero, debemos verificar si el estudiante se ha apropiado del concepto matemático estudiado y ha desarrollado la habilidad y acumulado la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después, debemos evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos.

Objetivo del libro

Estudiamos los elementos de geometría plana, las figuras geométricas, su clasificación y simetría. Aplicamos las herramientas de la geometría para construir ángulos y aplicarlos en los triángulos. Estudiamos con detenimiento los triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras, el plano cartesiano, el círculo y las relaciones trigonométricas.

Abordamos el concepto de función, usando la estrategia pedagógica de las aproximaciones al concepto. Utilizando el concepto de función, construimos las funciones trigonométricas, las igualdades trigonométricas y sus aplicaciones en las ecuaciones trigonométricas.

Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: www.mathematike.org

En este sitio presentamos con más detalle la pedagogía de San Ignacio, así como la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo que la comunicación con ustedes los maestros y alumnos es de vital importancia.