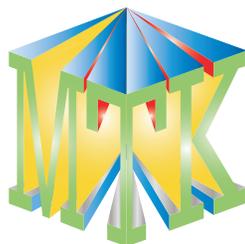


Álgebra 2

Incluye Estadística y Probabilidad
Noveno Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Álgebra 2

Noveno Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2020

ISBN 978-970-93600-7-3

Contenido

Contenido

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	vii
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	vii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Cómo está organizado el libro	viii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Nuestra página en Internet	viii

Capítulo 1

Álgebra de Más de Tres Dimensiones

Las letras adquieren vida propia en el álgebra	11
Las letras adquieren vida propia en el álgebra	11

Potencias Algebraicas

Nomenclatura de potencia algebraica	12
Nomenclatura de potencia algebraica con coeficiente diferente de uno	12
Suma de potencias algebraicas	13
Multiplicación de potencias algebraicas que tienen la misma base	15
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas	15
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas con coeficientes diferentes de uno	15
Potencia de una multiplicación algebraica	17
Potencia de una potencia	19
Potencia de un cociente	21
Simplificación de potencias algebraicas que tienen la misma base	23
División de potencias algebraicas que tienen la misma base	25
Multiplicar el numerador y el denominador por la misma cantidad diferente de cero no altera el cociente	27

Cuadrado y Raíz Cuadrada

Definición de cuadrado	28
Definición de raíz cuadrada	29
Propiedades de la raíz cuadrada	30

Capítulo 2

Factorización

La ley distributiva de la multiplicación sobre la suma	37
Factorización de términos semejantes	38

Procedimiento para la factorización de términos	39
Simplificación de términos semejantes en un cociente de sumandos	40
Productos Notables	
Potencias de un binomio	42
Binomio al cuadrado	42
Suma de un binomio al cuadrado	42
Diferencia de un binomio al cuadrado	43
El binomio al cuadrado es un producto notable	43
Desarrollo de la suma de un binomio al cuadrado	43
Desarrollo de la diferencia de un binomio al cuadrado	43
Ejercicios Con el Material Didáctico	44
Demostración geométrica de la suma de un binomio al cuadrado	44
Demostración geométrica de la diferencia de un binomio al cuadrado	44
Factorización de un binomio al cuadrado	46
Binomio al cubo	47
Suma de un binomio al cubo	47
Diferencia de un binomio al cubo	47
El binomio al cubo es un producto notable	48
Desarrollo de la suma de un binomio al cubo	48
Desarrollo de la diferencia de un binomio al cubo	48
Ejercicios Con el Material Didáctico	49
Demostración geométrica de la suma de un binomio al cubo	49
Demostración geométrica de la diferencia de un binomio al cubo	49
Multiplicación de polinomios	50
Potencias de un polinomio	51
Desarrollo de la diferencia de cuadrados	52
Demostración algebraica de la diferencia de cuadrados	52
Ejercicios Con el Material Didáctico	53
Demostración geométrica de la diferencia de cuadrados	53
Factorización de una diferencia de cuadrados	53
La suma de cubos es un producto notable	54
Demostración algebraica de la suma de cubos	54
Desarrollo de la suma de cubos	54
La diferencia de cubos es un producto notable	55
Demostración algebraica de la diferencia de cubos	55
Desarrollo de la diferencia de cubos	55
Ejercicios Con el Material Didáctico	56
Demostración geométrica de la suma de cubos	56
Demostración geométrica de la diferencia de cubos	56
La multiplicación de dos binomios es un producto notable	57
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	57
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	58
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	59
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	59

Capítulo 3

División de Polinomios

División de un polinomio entre un monomio	65
División de un polinomio entre un monomio	66
Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio	67
División sintética	70
Procedimiento para realizar la división sintética	70
Consideraciones importantes al realizar la división sintética	71

Multiplicación de Fracciones Algebraicas

Algoritmo de la multiplicación de fracciones	72
--	----

División de Fracciones Algebraicas

División de fracciones	74
División de fracciones combinada con la multiplicación de fracciones	76

Suma de Fracciones Algebraicas	
Suma de fracciones cuando los denominadores son iguales	80
Suma de fracciones cuando los denominadores no son iguales	82
Mínimo común múltiple cuando las expresiones algebraicas no son factorizables	83
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas son factorizables	85
Mínimo común múltiple de polinomios cuando las expresiones algebraicas pueden descomponerse en factores	86
Suma de fracciones cuando los denominadores son diferentes	91
Suma de fracciones combinada con división de fracciones	94
Operaciones de expresiones algebraicas combinadas	97

Capítulo 4

Ecuaciones de Primer Grado

Solución de una ecuación	103
Solución de una ecuación de primer grado	103
Las ecuaciones tienen constantes y variables o incógnitas	104
Propiedad básica de una ecuación	104
Solución de una ecuación de primer grado	106
Reglas para resolver ecuaciones de primer grado	106
Procedimiento para resolver problemas de aplicación	110

Problemas de Aplicación de Ecuaciones Lineales

Capítulo 5

Estadística

Concepto de estadística	117
Recolección y organización de datos	117
Análisis de datos	118
Medidas de tendencia central	118
Medidas de dispersión	121
Gráficas de datos	123

Permutaciones y Combinaciones

Concepto de permutación	128
Algoritmo para calcular permutaciones	129
Concepto de combinación	130
Algoritmo para calcular combinaciones	131

Probabilidad

Concepto de probabilidad	134
Definición de probabilidad	134
Aplicación de permutaciones y combinaciones para calcular la probabilidad	136

Apéndice 1

Respuestas de las Series de Ejercicios

Capítulo 1	141
Capítulo 2	148
Capítulo 3	157
Capítulo 4	165
Capítulo 5	165

Apéndice 2

Material Didáctico

Suma y diferencia de un binomio al cuadrado	169
Suma de un binomio al cubo	175
Diferencia de un binomio al cubo	187
Suma de cubos	199
Diferencia de cubos	203

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

2. Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

3. Demostrar o verificar que lo entendido es cierto

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

Objetivo del libro

El objetivo de este libro es cubrir el noveno nivel de abstracción en la espiral ascendente del conocimiento matemático. En este nivel, aplicamos los conceptos básicos del álgebra que llamamos de tres dimensiones, para crear el universo algebraico de n dimensiones.

Usando el conocimiento adquirido, factorizamos expresiones algebraicas y estudiamos los productos notables, en dos y tres dimensiones.

Resolvemos problemas de fracciones algebraicas, en los cuales debemos utilizar las habilidades algebraicas para factorizar expresiones que hemos adquirido.

Avanzamos en el conocimiento de las ecuaciones de primer grado y sus problemas de aplicación.

Aplicamos nuestra habilidad para resolver fracciones algebraicas, realizamos ecuaciones de primer grado, utilizando el concepto de ecuación.

Para complementar el conocimiento matemático, estudiamos los conceptos básicos de estadística, combinaciones, permutaciones y probabilidad.

Cómo está organizado el libro

El libro ha sido organizado por conceptos, niveles de abstracción y aplicaciones de los conceptos.

Álgebra básica. Noveno nivel de abstracción

Capítulo 1.

En el octavo nivel, construimos los conceptos básicos del álgebra utilizando cartulinas de material didáctico, ya que trabajamos en tres dimensiones. Ahora generalizamos este conocimiento y creamos el álgebra de n dimensiones.

Capítulo 2.

La factorización y los productos notables, son conceptos y estrategias muy útiles para solución de problemas algebraicos, incluyendo las ecuaciones de segundo.

Capítulo 3.

Ahora estamos listos para estudiar las fracciones algebraicas, en las cuales utilizamos los conceptos y estrategias estudiados en el octavo nivel y los capítulos 1 y 2 de este libro.

Capítulo 4.

Utilizando el concepto de ecuación, que por primera vez estudiamos en el octavo nivel de abstracción, y la habilidad que hemos adquirido para manipular fracciones algebraicas, resolvemos ecuaciones de primer grado.

Conceptos selectos de matemáticas.

Capítulo 5.

Estadística y probabilidad, incluyendo los conceptos de las combinaciones y permutaciones.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: www.mathematike.org.

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.