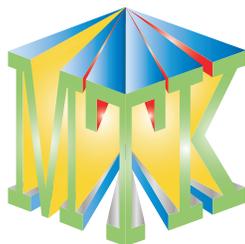


Integración del Conocimiento Algebraico

Décimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Integración del Conocimiento Algebraico

Décimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2020

Contenido

Contenido

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	ix
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	ix
Material didáctico Mathematiké	x
Objetivo del libro	x
Cómo está organizado el libro	x
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	x
Nuestra página en Internet	x

Capítulo 1

Conjuntos

Definición de conjunto	13
Notación de conjunto	13
Representación de los elementos de un conjunto	13
Conjunto universo	13
Conjunto de los números naturales y enteros positivos	13
Un elemento pertenece a un conjunto	14
El conjunto vacío	14
Subconjunto	14
Definición de variable	15
Notación de conjunto usando una variable	15
Unión de conjuntos	15
Intersección de conjuntos	15

Orden en la Ejecución de las Operaciones

Uso del paréntesis	19
El paréntesis indica multiplicación	19
El paréntesis indica el orden en el que debemos realizar las operaciones	19

Los Números Tienen su Imagen

En álgebra ya no restamos, solamente sumamos	21
La recta de los números reales	21
En álgebra el cero es la bisagra del espejo de la recta de los números reales	21
El signo menos (-) significa la imagen del número	22
El signo más (+) significa sumar el número	23
Ejercicios con el material didáctico	23

Multiplicación y División de Números Reales

Buscar las imágenes a espejo de los números reales	24
Regla de la multiplicación de signos	24
Demostración algebraica de la multiplicación de signos negativos	25
Regla de la división de signos	27

El signo negativo en los números fraccionarios	27
Multiplicación de números reales fraccionarios	28
División de números reales fraccionarios	28
Suma de Números Reales	
Las distancias también tienen imagen	30
Representamos las distancias con una flecha que se llama vector	30
Representamos las distancias con una flecha que se llama vector	30
Suma de distancias negativas con distancias positivas o suma de vectores en sentido contrario	31
Ejercicios con el material didáctico	32
Suma algebraica de números fraccionarios	33
Suma algebraica de números fraccionarios de igual denominador	33
Suma algebraica de números fraccionarios de diferente denominador	34
Suma algebraica de números fraccionarios combinada con multiplicaciones y divisiones	37
Capítulo 2	
Las Letras Representan Números y Dimensiones	
Álgebra	41
Con las letras creamos fórmulas	41
Las letras representan dimensiones	42
Suma de dos o más letras diferentes	42
Suma de la misma letra varias veces	43
Suma de grupos de la misma letra o de vectores de la misma magnitud	43
El coeficiente de una letra	43
La ley conmutativa	43
Suma de grupos de letras diferentes	44
Procedimiento para sumar grupos de letras diferentes	44
Multiplicación de un número por una letra o un grupo de la misma letra	44
Suma combinada con la multiplicación de un número por un grupo de letras	45
La ley distributiva	46
Suma de grupos de letras combinada con la ley distributiva	46
La ley asociativa	47
La imagen de una magnitud o de una distancia	48
Suma de grupos diferentes de letras negativas	49
Suma de grupos de la misma letra positivos y negativos	49
Factorización del signo menos	50
Las Letras Representan Áreas	
La multiplicación de dos letras	52
Multiplicación de una letra por sí misma	52
Multiplicación de dos letras diferentes	52
La imagen de un área	52
Suma del producto de dos letras o suma de áreas	53
Procedimiento para sumar áreas y vectores ambos positivos y negativos	54
Las Letras Representan Volúmenes	
El producto de tres letras representa un volumen	57
Multiplicación de una letra por sí misma tres veces	57
La multiplicación de tres letras representa un prisma rectangular	57
La imagen de un volumen	57
Suma del producto de tres letras o suma de volúmenes	58
Procedimiento para sumar volúmenes, áreas y vectores positivos y negativos	59
Capítulo 3	
Álgebra de Más de Tres Dimensiones	
Las letras adquieren vida propia en el álgebra	65
Las letras pueden representar más de tres dimensiones	65
Potencias Algebraicas	
Nomenclatura de potencia algebraica	66
Nomenclatura de potencia algebraica con coeficiente diferente de uno	66
Suma de potencias algebraicas	67

Multiplicación de potencias algebraicas que tienen la misma base	68
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas	68
Procedimiento cuando los multiplicandos son una combinación de potencias de bases iguales y distintas con coeficientes diferentes de uno	69
Potencia de una multiplicación algebraica	70
Potencia de una potencia	72
Potencia de un cociente	74
Simplificación de potencias algebraicas que tienen la misma base	76
División de potencias algebraicas que tienen la misma base	78
Multiplicar el numerador y el denominador por la misma cantidad diferente de cero no altera el cociente	79
Cuadrado y Raíz Cuadrada	
Definición de cuadrado	81
Nomenclatura utilizada en la raíz cuadrada	82
Definición de raíz cuadrada	82
Número cuadrado perfecto	83
Propiedades de la raíz cuadrada	83
Capítulo 4	
Factorización	
La ley distributiva de la multiplicación sobre la suma	89
Factorización de términos semejantes	90
Procedimiento para la factorización de términos	90
Simplificación de términos semejantes en un cociente de sumandos	92
Productos Notables	
Potencia de un binomio	94
Binomio al cuadrado	94
Suma de un binomio al cuadrado	94
Diferencia de un binomio al cuadrado	94
El binomio al cuadrado es un producto notable	95
Desarrollo de la suma y la diferencia de un binomio al cuadrado	95
Ejercicios con el material didáctico	95
Factorización de un binomio al cuadrado	97
Binomio al cubo	98
Suma de un binomio al cubo	98
Diferencia de un binomio al cubo	98
El binomio al cubo es un producto notable	99
Desarrollo de la suma y la diferencia de un binomio al cubo	99
Ejercicios con el material didáctico	99
Multiplicación de polinomios	101
Potencias de un polinomio	102
La diferencia de cuadrados es un producto notable	102
Demostración algebraica de la diferencia de cuadrados	102
Ejercicios con el material didáctico	103
Factorización de una diferencia de cuadrados	103
La suma y diferencia de cubos son un producto notable	104
Desarrollo de la suma y la diferencia de cubos	104
Demostración algebraica de la suma y diferencia de cubos	104
Ejercicios con el material didáctico	105
La multiplicación de dos binomios es un producto notable	107
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	107
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable es uno	107
Desarrollo de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	109
Factorización de la multiplicación de dos binomios cuando el coeficiente de la variable no es uno	110
Capítulo 5	
División de Polinomios	
División de un polinomio entre un monomio	115
División de un polinomio entre otro polinomio	116

Algoritmo para dividir un polinomio entre otro polinomio	116
División sintética	119
Procedimiento para realizar la división sintética	119
Condiciones para realizar la división sintética	120
Multiplicación de Fracciones Algebraicas	
Algoritmo de la multiplicación de fracciones	122
División de Fracciones Algebraicas	
Hay dos formas de expresar y resolver la división de fracciones	124
Notación de división. La ley de la tortilla	124
Notación de fracción	124
Demostración de la división de fracciones	124
División de fracciones combinada con la multiplicación de fracciones	126
Suma de Fracciones Algebraicas	
Suma de fracciones cuando los denominadores son iguales	128
Mínimo común múltiplo	129
Mínimo común múltiplo de expresiones algebraicas	130
Suma de fracciones cuando los denominadores no son iguales	135
Suma de fracciones combinada con división de fracciones	138
Operaciones de expresiones algebraicas combinadas	140
Capítulo 6	
Concepto de Ecuación	
Concepto de ecuación	147
Constantes, variables e incógnitas	147
Solución o raíz de una ecuación	147
La ecuación no cambia si la operación algebraica que hacemos del lado derecho la hacemos también del lado izquierdo	149
Solución de una ecuación	151
Reglas para resolver ecuaciones	152
Ecuaciones en las cuales hay más de una letra o variable	153
Clasificación de las ecuaciones según el máximo exponente de la incógnita	154
Ecuaciones Lineales	
Definición de ecuación de primer grado o lineal	157
Problemas de Aplicación de Ecuaciones Lineales	
Procedimiento para resolver problemas de aplicación	160
Problemas relacionados con números	160
Problemas misceláneos	162
Capítulo 7	
Ecuaciones de Segundo Grado	
Definición de una ecuación de segundo grado o cuadrática	173
Teorema del factor cero	173
Solución o raíces de una ecuación de segundo grado	173
Tipos de solución de una ecuación de segundo grado	173
Casos para la solución de una ecuación de segundo grado	174
Solución de una ecuación de segundo grado sin término independiente	174
Solución de una ecuación de segundo grado sin término lineal	175
Solución de una ecuación de segundo grado cuando la ecuación puede ser factorizada en dos binomios	176
Solución de una ecuación de segundo grado completando el cuadrado para poder factorizarla	177
Solución de una ecuación de segundo grado usando la fórmula general	179
Problemas de Aplicación	
Procedimiento para la solución de problemas de aplicación	182
Gráfica de una Ecuación	
Variables dependientes y variables independientes	187
La relación que guardan la variable dependiente y la independiente definen la gráfica	187
Sistema coordenado cartesiano	187
Pares ordenados (x, y)	188
Tabulación de una ecuación	188

Gráfica de una ecuación de primer grado	189
Gráfica de una ecuación de segundo grado	190
Capítulo 8	
Sistemas de Ecuaciones	
Definición de un sistema de ecuaciones	195
Sistemas de ecuaciones de dos variables	195
Sistemas de ecuaciones de tres variables	195
Solución gráfica de un sistemas de ecuaciones	195
Sistemas de Dos Ecuaciones	
Concepto utilizado en la solución de sistemas de ecuaciones	198
Método de sustitución para resolver un sistema de dos ecuaciones	198
Método de igualación para resolver un sistema de dos ecuaciones	201
Método de suma o eliminación para resolver un sistema de ecuaciones	204
Sistemas de Tres Ecuaciones	
Combinación de los tres métodos de solución de un sistema de ecuaciones	207
Solución de un sistema de tres ecuaciones	207
Problemas de Aplicación	
Problemas de aplicación de sistemas de ecuaciones con dos incógnitas	210
Capítulo 9	
Desigualdades	
Concepto de desigualdad	219
Las desigualdades en la recta de los números reales	219
Las igualdades o ecuaciones	219
Las desigualdades con letras	219
Notación utilizada en las desigualdades	220
Propiedades de las desigualdades	222
Solución de una Desigualdad de Primer Grado	
Solución de desigualdades de primer grado o lineales	223
Problemas de Aplicación	
Problemas de aplicación de desigualdades lineales	225
Sistemas de Desigualdades Lineales	
Definición de sistemas de desigualdades lineales	227
Solución de sistemas de desigualdades lineales	227
Valor Absoluto	
Definición de valor absoluto	229
Solución de ecuaciones con valor absoluto	229
Apéndice 1	
Capítulo 1	233
Capítulo 2	236
Capítulo 3	239
Capítulo 4	245
Capítulo 5	252
Capítulo 6	258
Capítulo 7	261
Capítulo 8	263
Capítulo 9	265
Apéndice 2	
Suma y Diferencia de un Binomio al Cuadrado y Diferencia de Cuadrados	279
Cartulina 1	279
Suma y Diferencia de un Binomio al Cuadrado y Diferencia de Cuadrados	281
Cartulina 2	281
Suma y Diferencia de un Binomio al Cuadrado y Diferencia de Cuadrados	283
Cartulina 3	283
Suma de un Binomio al Cubo	285
Integración del Conocimiento Algebraico	vii

Cartulina 1	285
Suma de un Binomio al Cubo	287
Cartulina 2	287
Suma de un Binomio al Cubo	289
Cartulina 3	289
Suma de un Binomio al Cubo	291
Cartulina 4	291
Suma de un Binomio al Cubo	293
Cartulina 5	293
Suma de un Binomio al Cubo	295
Cartulina 6	295
Diferencia de un Binomio al Cubo	297
Cartulina 1	297
Diferencia de un Binomio al Cubo	299
Cartulina 2	299
Diferencia de un Binomio al Cubo	301
Cartulina 3	301
Diferencia de un Binomio al Cubo	303
Cartulina 4	303
Diferencia de un Binomio al Cubo	305
Cartulina 5	305
Diferencia de un Binomio al Cubo	307
Cartulina 6	307
Suma de Cubos	309
Cartulina 1	309
Suma de Cubos	311
Cartulina 2	311
Diferencia de Cubos	313
Cartulina 1	313
Diferencia de Cubos	315
Cartulina 2	315

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la Pedagogía de la Espiral Ascendente para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

2. Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

3. Demostrar o verificar que lo entendido es cierto

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

Objetivo del libro

Este libro de texto contiene un recorrido completo de toda el álgebra básica que un estudiante debe saber, antes de empezar la gran aventura del álgebra intermedia.

Es muy importante que los estudiantes se apropien de todos los conceptos aquí presentados, que los apliquen creando los algoritmos y fórmulas, así como también desarrollen la habilidad en utilizarlos.

Cómo está organizado el libro

Este libro corresponde al décimo nivel de abstracción y ha sido organizado siguiendo la lógica y dinámica de la espiral ascendente del conocimiento.

Sugerimos que el libro sea recorrido en el orden en el que aparecen los capítulos.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas Mathematiké tiene una página en el internet: www.mathematike.org.

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.