



**Aritmética**  
Quinto Año  
Quinto y Sexto Niveles de Abstracción  
José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV  
Prohibido Reproducir  
Todos los Derechos Reservados  
Impreso en México  
2020

# Contenido

## Contenido

### Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	7
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	7
Material didáctico Mathematiké	8
Objetivo del libro	8
Cómo está organizado el libro	8
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	8
Nuestra página en Internet	8

## Capítulo 1

### Los Números Naturales

Los nueve dígitos	11
El cero	12
Las columnas numéricas	12
Las columnas numéricas	13
La cantidad de números naturales es infinita	13
Los nombres de los números	13
Notación desarrollada	15

### Teorema Fundamental de la Aritmética

Con la multiplicación también podemos crear algunos números naturales	16
Los números primos solamente pueden crearse sumando 1	16
Los números no primos también se crean multiplicando números primos	17
Teorema fundamental de la aritmética	17
Definición de números primos y no primos utilizando la división	18
Factores primos de un número natural	18

### Propiedades de los Números Enteros

Divisibilidad de los números	20
Números creados con el número primo 2	20
Números creados con el número primo 2 repetido al menos dos veces	22
Números creados con el número primo 3	23
Números creados con el número primo 3 repetido al menos dos veces	25
Números creados con los números primos 2 y 3	28
Números creados con el número primo 5	30

Números creados con los números primos 2 y 5	30
Resumen de la forma de crear los números naturales	31
Resumen de las características de los números naturales	31
Tabla de números pares, impares y primos	32
El cero	32
Números enteros	32
<b>Números Fraccionarios</b>	
Concepto de número fraccionario	34
Unidad de una fracción	34
Concepto de unidad de una fracción	34
Tipos de unidad	35
Notación de un número fraccionario	35
Números racionales o fraccionarios	37
Números irracionales	37
<b>Clasificación de los Números</b>	
Números naturales	38
Cero	38
Números enteros	38
Números fraccionarios o racionales	38
Números irracionales	38
Números reales positivos	38
Árbol genealógico de los números reales positivos	39
Números reales positivos	40
<b>Capítulo 2</b>	
<b>La Suma y la Resta Son Operaciones Inversas</b>	
La suma y la resta son operaciones inversas	47
Comprobación de la suma y la resta	49
<b>Sumas y Restas Combinadas</b>	
Orden para efectuar sumas y restas combinadas	55
<b>Problemas de Aplicación</b>	
<b>Capítulo 3</b>	
<b>La Multiplicación y la División Son Operaciones Inversas</b>	
La construcción de las tablas de multiplicar y de dividir	67
<b>Algoritmo de la División</b>	
División de dos números cuando el divisor tiene dos o más cifras	72
División de dos números haciendo las restas mentalmente	79
División de dos números expresados en notación decimal	90
<b>Comprobación de la Multiplicación y la División</b>	
Comprobación de la multiplicación	96
Comprobación de la división	97
<b>Multiplicación y División entre 10 y sus Múltiplos</b>	
Multiplicar por 10 y sus múltiplos un número entero	100
Multiplicar por 10 y sus múltiplos un número decimal	101
Dividir entre 10 y sus múltiplos un número entero o decimal	102
Resumen de la multiplicación y división entre 10 y sus múltiplos.	103
<b>Problemas de Aplicación</b>	

## Capítulo 4

### Clasificación de las Fracciones

Fracciones propias y fracciones impropias	109
Notación de fracción impropia	109

### Suma y Resta de Fracciones

Mínimo común múltiplo mentalmente	114
Suma y resta de fracciones mentalmente	117
Descomponer un número no primo en sus factores primos	121
Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos	121
Mínimo común múltiplo utilizando el algoritmo	124
Suma y resta de fracciones usando el método corto	127
Suma y resta de fracciones usando el método tradicional	129

### Multiplicación de Fracciones

Concepto de la multiplicación de números naturales	134
Concepto de la multiplicación de números fraccionarios	134
Multiplicación de fracciones en forma geométrica	135
Algoritmo para la multiplicación de fracciones	139

### División de Fracciones

Notación de división de fracciones	143
Concepto de la división de números enteros	144
Concepto de la división de números fraccionarios	144
División de fracciones en forma geométrica	145
Algoritmos para la división de fracciones	150
Algoritmo utilizando notación de fracción	150
Algoritmo utilizando notación de fracción	154
La ley de la tortilla	154

### Problemas de Aplicación

## Capítulo 5

### Proporciones

Concepto de proporcionalidad	163
Rectas iguales	163
Rectas proporcionales	163
Constante de proporcionalidad	164
Dos pares de rectas proporcionales	165
Proporcionalidad entre dos pares de rectas	168
La multiplicación y la división son operaciones inversas	168

### Regla de Tres

Concepto de regla de tres	171
---------------------------	-----

### Razón

Concepto de razón	176
Razones más comunes	176

### Promedio

Concepto de promedio	180
Concepto de promedio en la recta de los números	180
Formula para calcular el promedio de dos números	180
El promedio de más de dos números	181
Formula para calcular el promedio de más de dos números	182

### Problemas de Aplicación

## Capítulo 6

### Raíz Cuadrada

Concepto de raíz	189
Concepto de raíz cuadrada	189
Notación de raíz cuadrada	189
Calculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico	189
Estrategia para desarrollar el algoritmo para calcular la raíz cuadrada	192
Algoritmo para calcular la raíz cuadrada	192
Algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada	192

### Problemas de Aplicación

## Capítulo 7

### Figuras Geométricas Planas

Instrumentos de geometría	201
El punto	201
La recta	201
Tipos de rectas	202
Relación entre rectas	202
Trazar rectas paralelas y perpendiculares	202
Polígonos	203
El círculo y la elipse	203
Clasificación de las figuras geométricas planas	203
Clasificación de los polígonos	203
Tipos de polígonos de acuerdo al tamaño de sus lados	204
Tipos de polígonos de acuerdo al número de sus lados	204
Clasificación de los cuadriláteros	204
Clasificación de los triángulos de acuerdo al paralelogramo del que proceden	205
Clasificación de los triángulos de acuerdo al tamaño de sus lados	205
Figuras geométricas planas	206

### Simetría de Figuras Geométricas Planas

Concepto de simetría	207
----------------------	-----

### Perímetros y Áreas

Perímetro de un polígono	216
El círculo	217
Perímetro de un círculo	218
El número $\pi$ es la relación entre el perímetro y el diámetro de un círculo	218
Fórmula para calcular el perímetro de un círculo	219
Área de cuadrados, rectángulos y romboides	221
Área de triángulos	222
Área de polígonos regulares e irregulares	224
Área de un círculo	227
El número $\pi$ es la relación entre el área y el radio al cuadrado de un círculo	227
Fórmula para calcular el área de un círculo	230
Relación de las unidades de longitud dentro del sistema métrico decimal	232
Resumen de la multiplicación y división entre 10 y sus múltiplos.	233
Relación de unidades de área dentro del sistema métrico decimal	235

## Capítulo 8

### Poliedros

Poliedros	241
Clasificación de los poliedros	241
Prismas	242
Nombre de un prisma	242
Cilindros	243
Clasificación de los prismas	243
Figuras geométricas solidas	244

### Volumen de Prismas y Cilindros

Volumen de un prisma	245
Formula del volumen de un prisma	245
Volumen de un cilindro	246
Volumen de un prisma oblicuo	249

## Apéndice

### Material Didáctico

Instrucciones para recortar el material	253
Instrucciones para armar el material	253
Multiplicación y división de fracciones	255
Raíz cuadrada	261
Figuras geométricas	267
Figuras geométricas	269
Figuras geométricas	271
Área y perímetro del círculo	273
Área y perímetro del círculo	275
Área y perímetro del círculo	277
Volumen de prismas	279



# Introducción

## La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la Pedagogía de la Espiral Ascendente para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

## La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

### 1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

### 2. Entender

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda. Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

### 3. Demostrar

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

### 4. Aplicar, crear

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

### 5. Evaluar

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

## Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

## Objetivo del libro

Este libro de texto y de trabajo tiene como objetivo ayudar a los niños a apropiarse de los conceptos aritméticos y geométricos, que les permitan crear sus propios algoritmos para resolver las operacio-

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

nes básicas con números enteros y fraccionarios, y desarrollar la habilidad para hacer operaciones, tanto mentalmente como utilizando los algoritmos que ellos mismos han construido.

## Cómo está organizado el libro

Este libro corresponde al quinto y sexto niveles de abstracción.

Está organizado por conceptos y sus aplicaciones.

### Capítulos 1

Abordamos nuevamente la dinámica básica del sistema de numeración decimal, el teorema fundamental de la aritmética y los números fraccionarios.

### Capítulo 2

Estudiamos la suma y la resta como operaciones inversas y combinadas.

### Capítulo 3

La multiplicación y la división como operaciones inversas y combinadas.

### Capítulo 4

Suma, resta, multiplicación y división de fracciones.

### Capítulo 5

Proporciones, regla de tres, razón y promedio.

### Capítulo 6

El concepto y algoritmo de la raíz cuadrada.

### Capítulo 7

Estudiamos las figuras geométricas planas, simetría perímetro y área.

### Capítulo 8

Estudiamos el volumen de poliedros, prismas y cilindros rectos y oblicuos.

## Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el

fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

## Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas Mathematiké tiene una página en el internet: [www.mathematike.org](http://www.mathematike.org).

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.