

Integración del Conocimiento

Aritmético

Pre Álgebra
Séptimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda



Integración del Conocimiento Aritmético

Pre Álgebra

Séptimo Nivel de Abstracción

José Luis Moreno Aranda

Grupo Mathematiké, SA de CV

Prohibido Reproducir

Todos los Derechos Reservados

Impreso en México

2018

Contenido

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas	vii
La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos	vii
Material didáctico Mathematiké	viii
Objetivo del libro	viii
Cómo está organizado el libro	viii
Niveles en la apropiación del conocimiento matemático	viii
Nuestra página en Internet	viii

Capítulo 1

Los Números Naturales

Los nueve dígitos	11
El cero	12
Números naturales	12
Dimensiones o realidades de los números naturales	12
Los números también representan dimensiones	13
Las columnas numéricas	13
La columna de las unidades	13
La columna de las decenas	14
Dinámica básica del sistema decimal para crear números	14
Notación desarrollada	16
La columna de las centenas	17
Las columnas numéricas	18
El conjunto de los números naturales	19
El conjunto de los números naturales es infinito	20
Conjunto de los números enteros	20
La recta de los números enteros	20

Capítulo 2

Suma y Resta de Números Hasta el 18

Suma y resta de números hasta el 18	23
Suma y resta de números hasta el 18 utilizando las columnas numéricas	23
Suma y resta de números hasta el 18 utilizando las columnas numéricas	24
Suma y resta de números enteros con el material didáctico utilizando 9 dígitos	27
Suma con el algoritmo en notación desarrollada y en notación compacta	29
Suma con el algoritmo en notación desarrollada y en notación compacta	30

Ábaco Tipo Japonés

Escribir números en el ábaco	31
Sumas y restas utilizando el ábaco	33

La Suma y la Resta Son Operaciones Inversas

Concepto de operación inversa	40
La resta es la operación inversa de la suma	40
La suma es la operación inversa de la resta	40
Número faltante en la suma y la resta	41

Sumas y Restas Combinadas

Orden para efectuar una operación con varias sumas y una resta	42
Orden para efectuar una operación con varias sumas y varias restas	43

Capítulo 3

Multiplicación

Concepto de multiplicación	47
Las tablas de multiplicar	47
Construir las tablas de multiplicar utilizando el material didáctico	48
Multiplicación utilizando las columnas numéricas	48
Multiplicación utilizando notación desarrollada y la cuadrícula	48
Multiplicación utilizando la cuadrícula	49
Multiplicación sin utilizar la cuadrícula y en forma compacta	49
Multiplicación utilizando la cuadrícula, cuando el multiplicando y el multiplicador tienen dos cifras	50
Multiplicación utilizando la cuadrícula, cuando el multiplicando tiene tres cifras y el multiplicador tiene dos cifras	50
Multiplicación de números enteros	51

División

Concepto de división	52
Las tablas de dividir	52
Notación para efectuar divisiones	53
Residuo de la división	53
División con residuo	54
En cada columna numérica la división se realiza de la misma forma	54
La división cuando el dividendo tiene dos y tres cifras	55
Notación decimal	56
División de dos números expresados en notación decimal	58
División de dos números haciendo las restas mentalmente	59
División de dos números cuando el divisor tiene dos o más dígitos	60
División de dos números haciendo las restas mentalmente	61
División de dos números expresados en notación decimal	62
División de dos números expresados en notación decimal	63
La construcción de las tablas de multiplicar y de dividir	64

La Multiplicación y la División Son Operaciones Inversas

Concepto de operación inversa	64
La multiplicación y la división son operaciones inversas	64
Número faltante en la multiplicación y la división	65

Comprobación de la Multiplicación y la División

Comprobación de la multiplicación	67
Comprobación de la división	67

Capítulo 4

Operaciones Básicas en Notación Decimal

Suma y resta de números expresados en notación decimal	71
Multiplicación de números expresados en notación decimal	72
Multiplicación y división por 10	74
Múltiplos	74
Submúltiplos	74

Problemas de Aplicación

Suma, resta, multiplicación y división	77
--	----

Capítulo 5

Números Primos y No Primos

Con la multiplicación también podemos crear algunos números naturales	83
Los números primos solamente pueden crearse sumando 1	83
Teorema fundamental de la aritmética	84
Definición de números primos y no primos utilizando la división	84
Factores de un número natural	85

Factores primos de un número natural	85
Descomponer un número no primo en sus factores primos	86
Algoritmo para descomponer un número no primo en sus factores primos	86
Mínimo común múltiplo	87
Algoritmo para encontrar el mínimo común múltiplo	88
Creación de los Números Naturales	
Construir los números naturales utilizando el teorema fundamental de la aritmética	90
Números creados usando el número primo 2	90
Números creados usando el número primo 3	92
Números creados con el número primo 3 dos veces	92
Números creados con los números primos 2 y 3	93
Números creados con el número primo 5	94
Números creados con los números primos 5 y 2	94
Divisibilidad de los números naturales	94
Dimensiones o realidades de los números naturales	96
Números enteros	96
Árbol genealógico de los números enteros	97
El árbol genealógico es también el teorema fundamental de la aritmética	97
Los Números Fraccionarios	
Introducción	98
Concepto de fracción	98
Concepto de unidad de una fracción o número fraccionario	98
La unidad de una fracción puede ser simple o compuesta	99
Notación de un número fraccionario	99
Notación de fracción mixta	103
Fracciones impropias	107
Fracciones equivalentes	110
Números racionales	111
Números irracionales	111
Clasificación de los Números	
El cero	112
Números naturales	112
Números enteros	112
Números fraccionarios o racionales	112
Números irracionales	112
Números reales positivos	112
Árbol genealógico de los números reales positivos	113
Clasificación de los números reales positivos	114
La Recta de los Números Reales Positivos	
Los números también representan una distancia	115
Los números irracionales no se pueden localizar en la recta de los números	116
La recta de los números reales positivos	116
Capítulo 6	
Suma y Resta de Fracciones	
Concepto de suma y resta de fracciones	119
Mínimo común múltiplo	121
Simplificación de fracciones	121
Conversión de fracción simple a notación mixta	122
Conversión de fracción en notación mixta a fracción simple	123
Algoritmo para sumar y restar fracciones	124
Suma y resta de fracciones usando el método rápido	124
Suma y resta de fracciones usando el método rápido	125
El común denominador es el común múltiplo de los denominadores	126
Multiplicación de Fracciones	
Concepto de la multiplicación de números naturales	129
Concepto de la multiplicación de números fraccionarios	129
Algoritmo para la multiplicación de fracciones	130

División de Fracciones	
Notación de la división de fracciones	132
Concepto de la división de números enteros	132
Concepto de la división de números fraccionarios	133
Algoritmos para la división de fracciones	135
Algoritmo de la división utilizando notación de fracción	135
Algoritmo de la división de fracciones cuando usamos el símbolo de división	136
La ley de la tortilla	136
Problemas de Aplicación	
Serie de Ejercicios 13	138
Capítulo 7	
Sistema Romano de Numeración	
Característica del sistema romano de numeración	143
Símbolos utilizados en los números romanos	143
Procedimiento para escribir números romanos	143
Proporciones	
Concepto de rectas proporcionales	146
Constante de proporcionalidad	146
Figuras geométricas proporcionales o semejantes	148
Rectángulos	149
Triángulos	149
Regla de Tres	
Regla de tres	151
Razones	152
Promedio	
Concepto de promedio	154
Raíz Cuadrada	
Concepto de raíz cuadrada	156
Cálculo de la raíz cuadrada utilizando material didáctico	156
Estrategia para desarrollar el algoritmo de la raíz cuadrada	158
Algoritmo para calcular la raíz cuadrada	158
El algoritmo de los tres pasos para calcular la raíz cuadrada	158
Apéndice 1	
Respuestas de los Ejercicios	
Capítulo 1	163
Capítulo 2	164
Capítulo 3	166
Capítulo 4	169
Capítulo 5	170
Capítulo 6	171
Capítulo 7	173
Apéndice 2	
Material Didáctico	
Las columnas numéricas	177
Tablas de multiplicar y dividir	183
Suma, resta, multiplicación y división de fracciones	185
Raíz cuadrada	191

Introducción

La pedagogía de la espiral ascendente de las matemáticas

Este libro de texto ha sido elaborado utilizando la *Pedagogía de la Espiral Ascendente* para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

Esta pedagogía tiene como marco filosófico referencial una filosofía humanista, es decir, tiene como único objetivo promover las capacidades que identifican a un ser como humano: la imaginación, la inteligencia, la creatividad, la libertad, etcétera.

Por lo cual, el plan estratégico de este libro ha sido diseñado pensando únicamente en la promoción humana de los estudiantes que ahora transitan por los salones de clase.

Esta metodología pedagógica consiste en un proceso de cinco pasos que se repiten cada vez que introducimos un nuevo concepto matemático. En nuestra página de Internet se encuentra una explicación detallada de esta novedosa metodología.

La estrategia pedagógica consiste en cinco pasos

1. Contextualizar el conocimiento

Se define claramente qué concepto matemático vamos a estudiar y se coloca sobre la espiral ascendente del conocimiento, es decir, consiste en verificar que el estudiante se ha apropiado ya de los conceptos previos necesarios para saber con precisión cuál será el siguiente concepto que estudiaremos, ya que los conceptos no son entes aislados que aparecen de repente, sino que son como ladrillos que para formar una barda se colocan para soportar a los que estarán encima de ellos.

2. Experimentar una realidad sensible utilizando los sentidos para permitirle al estudiante entender el concepto

A través de una estrategia pedagógica adecuada, el estudiante utiliza sus sentidos: debe tocar, ver, oír, oler o gustar el concepto para que al extraer datos inquiera e imagine, y así pueda captar la unidad inteligible de esos datos y, por lo tanto, los entienda.

Usando la geometría como hilo conductor en el estudio de las matemáticas hemos podido utilizar imágenes y material didáctico manipulable para la apropiación de los principales conceptos de las matemáticas.

3. Demostrar o verificar que lo entendido es cierto

Cuando el alumno logra entender y, por lo tanto, puede formular con sus propias palabras el concepto, entonces se pregunta si lo que entendió es verdadero. Cuando el estudiante utiliza el conocimiento matemático que hasta este momento ha adquirido, demuestra el concepto y llega a la comprensión total.

4. Aplicar el conocimiento adquirido y desarrollar la habilidad de usarlo en la solución de diferentes tipos de problemas.

Al aplicar el conocimiento, el alumno desarrolla o crea el algoritmo que le permite realizar operaciones o resolver problemas en forma ordenada y eficiente. Sin embargo, no basta sólo con que el alumno deduzca el algoritmo correspondiente sino que también es indispensable que desarrolle la habilidad y acumule la experiencia necesaria para el planteamiento y resolución de ese tipo de problemas.

5. Evaluar lo aprendido y la forma como fue aprendido

La evaluación se hace en dos sentidos. Primero se verifica si el estudiante se apropió del concepto matemático estudiado, así como desarrolló la habilidad y acumuló la experiencia necesaria en el planteamiento y resolución de problemas. Después se debe evaluar la forma en la cual hemos expuesto al alumno al concepto, es decir, nuestro propio trabajo como maestros.

Material didáctico Mathematiké

El material didáctico Mathematiké ayuda a los estudiantes a aplicar sus sentidos para que en forma sencilla, amena y divertida entiendan y demuestren el concepto que estudian.

El uso continuo de los juegos, posibilita a los alumnos a desarrollar la habilidad en la aplicación de los conceptos

Objetivo del libro

Este libro de texto contiene un recorrido completo de toda la aritmética que un estudiante debe saber, antes de empezar la gran aventura del álgebra.

La columna vertebral del aritmética es lo que en esta metodología llamamos: *La Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal*.

Es muy importante que los estudiantes se apropien de todos los conceptos aquí presentados, que los apliquen creando los algoritmos y fórmulas, así como también desarrollen la habilidad en utilizarlos.

Cómo está organizado el libro

Este libro corresponde al séptimo nivel de abstracción y ha sido organizado por conceptos y sus aplicaciones.

Las Cuatro Dimensiones de los Números

Los nueve dígitos, el cero y las columnas numéricas.

Suma y Resta

Utilizando las columnas numéricas y el ábaco tipo japonés, los alumnos entienden, demuestran y aplican los conceptos de la suma y resta.

Multiplicación y División

Utilizando la Pedagogía de los Cinco Pasos, los alumnos entienden, demuestran y aplican los conceptos de la multiplicación y división.

La Notación Decimal

Las cuatro operaciones utilizando notación decimal.

Dinámica Básica del Sistema de Numeración Decimal

La creación del sistema completo de numeración decimal: números primos, no primos, racionales, irracionales, decimales y fraccionarios.

Números Fraccionarios

Las cuatro operaciones básicas utilizando números fraccionarios.

Conceptos Selectos de Matemáticas

Sistema romanos de numeración, proporciones, regla de tres, promedio y raíz cuadrada.

Niveles en la apropiación del conocimiento matemático

La Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, propone que el alumno vaya consolidando niveles de abstracción y el desarrollo de las habilidades que el nivel requiere.

Para que los estudiantes vayan penetrando en el fascinante mundo de la abstracción matemática, sin dar brincos y gozando el conocimiento que van adquiriendo, recomendamos fuertemente, no pasar al siguiente nivel de abstracción hasta que el maestro ya ha verificado que los alumnos están preparados para hacerlo.

Nuestra página en Internet

Con el objeto de tener una vía de comunicación directa entre los maestros, los alumnos y el grupo de investigadores que hacemos esta propuesta educativa, el proyecto de investigación en la enseñanza de las matemáticas *Mathematiké* tiene una página en el internet: www.mathematike.org.

En este sitio, presentamos con mucho más detalle la Pedagogía de la Espiral Ascendente del Conocimiento, la lista completa y actualizada del material didáctico y de los libros de texto y de trabajo. Es nuestro compromiso mantener siempre al día nuestra propuesta educativa, por lo cual, la comunicación con ustedes los maestros, nos es de vital importancia.